ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ БЕЗОПАСНОГО РАЗВИТИЯ

АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ РАН

На правах рукописи

Л. В. Матвеев

Неклассические процессы переноса в сильно неоднородных средах

01.04.14 Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва, 2016

Содержание

Введение4
Глава 1. Режимы переноса примеси и асимптотическое поведение концентрации на
больших расстояниях в регулярно неоднородных средах15
1.1 Простая модель Дыхне15
1.2 Обобщенная модель Дыхне
1.2.1 Вспомогательная задача
1.2.2 Режимы переноса и асимптотики концентрации
1.3 Краткие выводы41
Глава 2. Перенос во фрактальных средах. Модель изотропной случайной адвекции43
2.1 Фрактальная среда с бесконечным радиусом корреляции44
2.1.1 Постановка задачи и основные соотношения
2.1.2 Масштабный анализ46
2.1.3 Поведение концентрации
2.1.4 Обсуждение
2.2 Случайная адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции57
2.2.1 Постановка задачи
2.2.2 Асимптотики массового оператора63
2.2.3 Поведение концентрации
2.2.4 Краткое обсуждение67
2.3 Динамические флуктуации поля скоростей инфильтрации
2.3.1 Корреляционная функция скорости при учете динамических флуктуаций69
2.3.2 Влияние динамических флуктуаций на режим переноса71
Глава 3. Случайная адвекция в анизотропных фрактальных средах
3.1 Постановка задачи
3.2 Макроскопические уравнения переноса и масштабный анализ

3.3 Поведение концентрации примеси	86
3.4 Режим переноса на больших временах	97
3.5 Выводы	98
Глава 4. Фрактальные двупористые (перколяционные) среды	100
4.1. Квазиизотропный случай	101
4.2 Анизотропный случай	112
4.3 Обсуждение	116
Глава 5. Статистически однородные двупористые среды	122
5.1 Основные уравнения и функция памяти	126
5.2 Режимы переноса и асимптотическое поведение концентрации	132
5.3 Эффекты сорбции в матрице	140
5.4 Обсуждение и выводы	141
Глава 6. Коллоидно-усиленный перенос в двупористых средах	146
6.1 Регулярно-неоднородные среды	147
6. 2 Фрактальные среды	
6.3 Статистически однородные двупористые среды	178
Глава 7. Перенос в регулярных течениях, обусловленных тепловой конвекцией	i184
7.1 Перенос примеси вдоль стационарной цепочки роллов	187
7.2 Флуктуирующая цепочка роллов	195
7.3 Эффективный коэффициент диффузии при переносе по системе гексагонал	ьных
ячеек	197
7.4 Влияние флуктуаций на перенос по системе ГЯ	201
7.5 Применение модели к описанию переноса макроскопических частиц	
7.6 Обсуждение и выводы	204
Заключение	207
Литература	211

Введение

Актуальность

Неклассическими (аномальными) называются процессы переноса, в которых показатель степени в зависимости от времени размера области локализации примеси (дисперсии)

$$R(t) \sim t^{\gamma}$$

отличается от значения $\gamma = 1/2$, свойственного классической диффузии. В случае, когда $\gamma > 1/2$, мы имеем дело с супердиффузией, а при $\gamma < 1/2$ – с субдиффузией.

Аномальные процессы транспорта встречаются в самых разных областях естествознания, таких как физика плазмы [1,2], физика полупроводников [3,4], астрофизика [5], биофизика [6,7], гидрогеология [8,9], и многих других [10]. Особое место в этом ряду занимают геологические среды. В последние десятилетия накоплен обширный массив данных полевых наблюдений, свидетельствующих о том, что во многих случаях транспорт примесей, растворенных в грунтовых водах геологических сред, не описывается классическими закономерностями, базирующимися на законах Дарси и Фика, и расхождение может достигать нескольких порядков [11]. Практическая важность задач о процессах транспорта в этих средах в значительной мере обусловлена тем, что именно они в настоящее время рассматриваются как место окончательного захоронения долгоживущих радиоактивных отходов (РАО). Ожидается, что в среднесрочной перспективе (на сотни и, возможно, тысячи лет) надежность захоронений будет обеспечена созданием инженерных защитных сооружений. Состояние же их в долгосрочной перспективе зависит от эффективности естественных геологических барьеров, которая определяется характеристиками процессов переноса радионуклидов в геологических средах.

Несмотря на то, что аномальные транспортные процессы исследуются достаточно давно (первые работы, по-видимому, относятся к 30-м годам прошлого века [17]), и вплоть до настоящего времени идет на эту тему поток публикаций, здесь остается множество нерешенных вопросов. Частично это связано с тем, что подавляющая часть работ базируется на формально математических подходах, таких как модель "continuous time random walks" (CTRW) [14], либо модель дробной диффузии [23]. Первая рассматривает миграцию отдельных частиц, так что частица с

определенной вероятностью может совершать прыжки различной длины и длительности. Во второй - описание ведется на основе уравнения с дробными производными для концентрации. Обе модели подтверждают возможность реализации аномальной дисперсии $R(t) \sim t^{\gamma}$ с $\gamma \neq 1/2$. При этом, в модели дробной диффузии концентрация на асимптотически далеких расстояниях от источника примеси ($r \gg R(t)$) убывает по степенному закону. Такой результат является следствием формально математической природы модели, не имеет под собой физической основы и является спорным. Отметим, что поведение концентрации на далеких расстояниях имеет исключительную важность для обоснования надежности захоронений РАО.

В настоящей работе построена теория неклассических процессов переноса в сильно неоднородных средах, базируясь на физических моделях. Основным объектом приложения считались геологические среды. Полагая масштаб неоднородностей среды большим в сравнении с межатомными расстояниями, в качестве физических механизмов транспорта примеси рассматривались диффузия и адвекция. Перечислим далее основные факторы, учтенные в нашей работе, предопределившие ее новизну и отличие от других исследований.

Адвекция примеси обусловлена просачиванием влаги по пустотам породы (естественным каналам, образованным порами или трещинам). Как показывают наблюдения [43], сложная структура трещин часто проявляет фрактальные свойства и подпадает под категорию перколяционных сред [13]. Вследствие фрактальной геометрии, корреляции скорости адвекции оказываются дальнодействующими, что создает предпосылки для возникновения супердиффузионного режима переноса примеси.

Другим фактором, приводящим к неклассическим режимам переноса, является резкий контраст в распределении характеристик геологической среды. При переносе по системе трещин, пронизывающих слабопроницаемую матрицу, последняя может для примеси играть роль ловушек, действие которых замедляет процесс переноса и способно привести к режиму субдиффузии.

Еще одним фактором, формирующим режимы переноса, является присутствие коллоидных частиц, которые могут адсорбировать примесь. Действие коллоидов, свободно перемещаемых грунтовыми водами по трещинам, противоположно матрице и приводит к усилению тенденции к установлению супердиффузионного режима.

При формировании режимов переноса радионуклидов в геологических средах может оказаться важным влияние на состояние среды остаточного тепловыделения за счет радиоактивных распадов. Этот процесс вблизи подземных хранилищ РАО может существенно повлиять на течение грунтовых вод и, соответственно, на перенос примеси.

Важным элементом нашей работы является значительное внимание к анализу поведения концентрации примеси на асимптотически далеких расстояниях, актуальность которого была отмечена выше.

Отметим, что модели переноса примеси в сильно неоднородных средах, разрабатываемые в настоящей работе, в равной степени могут быть использованы и для описания процессов переноса тепла. Это вытекает из того, что в обоих случаях управляющие уравнения имеют универсальную форму законов сохранения, которые диктуют однотипные условия на резких границах между различными участками среды.

Все сказанное выше позволяет считать тему диссертации актуальной и важной для практики.

Цель работы. Теоретическое исследование неклассических процессов переноса в сильно неоднородных средах с резким контрастом в пространственном распределении характеристик, а также в средах с фрактальной структурой. Задачами работы являются:

1. Анализ общей структуры распределения концентрации и выяснение связи между режимами переноса, определяемыми поведением концентрации в основной области локализации примеси, с характером убывания концентрации на асимптотически больших расстояниях.

2. Построение модели случайной адвекции для сред с фрактальными свойствами с учетом конечного радиуса корреляции, анизотропии и нестационарного характера распределения скорости адвекции.

3. Исследование роли двупористой структуры сред с фрактальными свойствами в теории переноса в перколяционных средах.

4. Построение модели переноса в резко контрастных статистически однородных средах.

5. Исследование влияния сорбции на поверхности каналов и подвижных коллоидных частицах на перенос примеси в двупористых резко контрастных средах.

6. Исследование закономерностей переноса примеси в условиях естественной тепловой конвекции в слое насыщенной пористой среды, подогреваемой снизу.

Научная новизна работы. Автором впервые

1. Установлено, что для всех типов аномального переноса в сильно неоднородных средах убывание концентрации на асимптотически далеких расстояниях имеет экспоненциальный вид.

2. Впервые показано, что смена режимов переноса во времени, приводит к многоступенчатой структуре концентрации на асимптотически далеких расстояниях, и установлена закономерность, что более далекая по пространству ступень асимптотики определяется более ранним по времени режимом переноса.

3. Впервые описан режим переноса на больших временах во фрактальных средах с конечным радиусом корреляции.

4. Установлено, что динамические флуктуации скорости не влияют на выводы модели случайной адвекции примеси в поле скоростей с дальнодействующими корреляциями.

5. Впервые описаны режимы переноса в модели случайной адвекции для анизотропных фрактальных сред.

6. Построено фрактальное обобщение модели переноса в двупористых средах.

7. Разработана новая модель, описывающая неклассические режимы переноса в резко контрастных статистически однородных средах.

8. Впервые описаны режимы коллоидно-усиленного переноса примеси в резко контрастных средах различного типа.

9. Развита модель переноса примеси в периодических течениях, обусловленных естественной тепловой конвекцией в пористых средах.

Научная и практическая значимость.

Развитые модели носят общефизический характер и могут быть использованы для решения широкого круга задач о переносе примеси и тепла в сильно неоднородных средах.

Разработанные модели дают возможность проведения улучшенных оценок переноса радионуклидов и других загрязнений в геологических средах, и могут служить основой для создания численных кодов, предназначенных для обоснования надежности подземных захоронений РАО и моделирования процессов очистки окружающей среды.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1. Концентрация примеси на асимптотически далеких расстояниях экспоненциально убывает с расстоянием для всех типов аномального переноса в сильно неоднородных средах. Если в основной области локализации примеси со временем происходит смена режимов переноса, асимптотика концентрации становится многоступенчатой, так что более далекие по пространству ступени определяются более ранними по времени режимами переноса.

2. Для фрактальных сред с конечной длиной корреляции на больших временах (когда размер области локализации превосходит корреляционную длину) режим супердиффузии сменяется режимом классической диффузии. Эффективный коэффициент диффузии имеет порядок произведения средней скорости адвекции на длину корреляции.

3. В модели случайной адвекции в средах с фрактальными свойствами динамические флуктуации поля скоростей не меняют характер переноса.

4. В слабо анизотропных фрактальных средах с медленно убывающим коррелятором скорости режим супердиффузии реализуется как в продольном (вдоль оси анизотропии), так и в поперечном направлении. При сильной анизотропии характер переноса в продольном направлении остается тем же, а в поперечном направлении перенос происходит в режиме классической диффузии. Вдоль оси анизотропии имеет место аномальный дрейф, так что среднее смещение частиц растет по супердиффузионному закону.

5. В перколяционных средах с конечным радиусом корреляции, перенос примеси описывается последовательностью четырех режимов. Первый – супердиффузионный, обусловлен адвекцией примеси по остову перколяционного кластера. Далее, вследствие действия ловушек (мертвых концов перколяционного кластера и окружающей пористой среды), перенос замедляется, и может реализоваться как супер-, так и субдиффузия. В следующем интервале, когда размер облака примеси превосходит корреляционную длину, но ловушки еще не насыщены, вдоль средней скорости

возможны как супер-, так и субдиффузия, а в поперечном направлении - субдиффузия. На самых поздних временах перенос описывается классической адвекцией-диффузией.

6. Для статистически однородных двупористых сред существует интервал времени, в котором режим переноса является аномальным – квазидиффузионным либо субдиффузионным. При определенных значениях параметров перенос на поздних временах не описывается общепринятой равновесной моделью.

7. Сорбция на коллоидах в резко контрастных средах приводит к значительному ускорению переноса. При сильной сорбции в течение большого интервала времени практически вся примесь оказывается адсорбированной на коллоидах и переносится вместе с ними. На поздних временах перенос описывается одним из режимов адвекции-диффузии, субдиффузии или квазидиффузии.

8. Перенос примеси вдоль цепочки роллов в условиях развитой конвекции Рэлея-Бенара происходит сначала в режиме субдиффузии, а затем – классической диффузии с эффективным коэффициентом, пропорциональным корню из числа Пекле. Если течение в роллах флуктуирует (при больших числах Рэлея), эффективный коэффициент диффузии растет пропорционально амплитуде флуктуаций скорости.

Личный вклад. Автором лично

1. Установлено, что экспоненциальный характер убывания профиля концентрации на асимптотически далеких расстояниях имеет место для всех типов аномального переноса в сильно неоднородных средах.

2. Показано, что смена режимов переноса во времени приводит к формированию многоступенчатой структуры профиля концентрации в асимптотически далекой области и установлена закономерность, что более далекие ступени асимптотики определяются более ранним режимом переноса.

3. Получен новый логарифмический режим переноса в обобщенной модели Дыхне для случая, когда сильно проницаемая область имеет вид прямого цилиндра.

4. Установлены режимы переноса во фрактальных средах с конечным радиусом корреляции и показано, что на больших временах режимом переноса является классическая адвекция-диффузия, причем эффективные параметры процесса определяются значением корреляционного радиуса среды.

5. Построено обобщение модели переноса на случай анизотропных фрактальных сред, получены скейлинги для размера облака примеси и описано поведение концентрации на асимптотически далеких расстояниях.

6. Предложено фрактальное обобщение модели переноса в двупористых средах.

7. Разработана модель, описывающая неклассический перенос в резко контрастных статистически однородных средах.

8. Построена теория коллоидно-усиленного переноса примеси в регулярно неоднородных и статистически однородных резко контрастных средах.

9. Установлены характеристики переноса примеси в периодических течениях, обусловленных естественной тепловой конвекцией в пористых средах.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на международной конференции IAHR (Стамбул, Турция, 2009), международной конференции "WM Symposia 2011" (Феникс, Аризона, США, 2011), международной конференции «Научные чтения памяти Александра Михайловича Дыхне» (г. Москва г. Троицк, 2013), Международной конференции по статистической физике SigmaPhi (Родос, Греция, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 31 печатная работа, 18 из них в ведущих реферируемых иностранных и отечественных журналах из списка, рекомендованного ВАК Минобрнауки России, а также 2 монографии.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка использованных источников, содержит 22 иллюстрации. Общий объем диссертации составляет 220 страницы.

Краткий обзор существующих подходов. Рассмотрим вкратце существующие подходы при моделировании переноса в неоднородных средах, приводящие к аномальным режимам переноса. Наиболее популярной моделью, пожалуй, является модель случайных блужданий в непрерывном времени (CTRW - model), в основе которой лежит усредненное описание миграции частиц на основе функции распределения вероятности отдельных прыжков в зависимости от их длины и длительности. В рамках данной модели неклассические режимы возникают при степенном и достаточно широком распределении вероятности длин и длительностей прыжков. При этом считается, что изначально параметры описывающие среду (вероятность прыжков) распределены однородно по пространству. Вид функции распределения определяется конкретным физическим механизмом, определяющим перенос отдельных частиц. Данная модель была предложена в [14] и в дальнейшем многократно использовалась для решения задач об аномальном переносе (см.,

например, обзор [15] и указанную там литературу). Отметим недавнюю работу [16] в которой данный подход был применен для описания миграции загрязнений в трещиноватых скалах.

Фактически на основе тех же принципов (через введение распределений вероятности прыжков) строятся модели «дробной диффузии» [17-24]. Если в CTRWмоделях распределение концентрации непосредственно записывается в виде функции от распределения вероятностей, то здесь для описания эволюции концентрации строятся уравнения типа законов сохранения, но содержащие производные (временные пространственные) дробных порядков. При такой постановке с учетом И соответствующих граничных условий можно рассматривать задачи переноса в области, состоящей из нескольких подобластей с разными свойствами, а также учитывать присутствие внешних полей. Следует подчеркнуть, что как в CTRW-моделях, так и в моделях уравнений с дробными производными в случае, если перенос примеси в основном облаке описывается аномальным режимом, концентрация на асимптотически больших расстояниях убывает по степенному закону. Применение данных подходов для анализа конкретных физических явлений можно найти в [10] (см., также, [25-29]).

В последнее время для описания неклассического переноса активно развивается подход (предложенный в [30]), в котором предполагается, что динамика системы (вероятность и характеристики скачков) может зависеть от значений концентрации примеси. В этом случае в качестве управляющего уравнения рассматривается нелинейное уравнение Фокера-Планка, решение которого также может привести к аномальным режимам переноса. В более общем случае модели этого типа учитывают нелинейное взаимодействие между частицами примеси, включая возможность их аннигиляции [31]. Применение данного подхода может быть обосновано, если концентрация мигрирующих частиц достаточно велика.

В ряде работ (см., например, [32]) развивается подход, в котором учитывается наличие корреляций в реализации последовательных скачков мигрирующих частиц (или, в более общем случае, корреляций в движении частицы [33, 34]). То есть возможность неклассичности переноса является результатом не-Марковской динамики.

Заметим, что описание переноса на основе элементарных скачков мигрирующих частиц в неоднородных средах является, в общем-то, абстрактным математическим приемом. При этом подразумевается, что длина элементарного скачка существенно

превосходит характерные размеры неоднородности среды (характеристики скачков содержат в себе информацию о свойствах неоднородностей среды). В случае же, когда размеры неоднородностей существенно превосходят масштабы отдельных скачков, представляется более естественным в качестве основы моделирования рассматривать конкретные физические механизмы, такие как адвекция и диффузия, и реальную геометрию среды.

Такой подход, например, был реализован в работе [1], где была рассмотрена слоистая среда, в которой примесь вдоль каждого слоя переносилась с постоянной скоростью, причем направление скорости от слоя к слою менялось случайным образом, а перенос между слоями происходил в результате диффузии. В итоге усредненный перенос вдоль слоев на временах, когда облако примеси занимало большое количество слоев, оказывался супердиффузионного типа.

В работе [35] рассматривался перенос примеси в регулярно-неоднородной двупористой среде, состоящей из двух областей с сильно различающимися коэффициентами переноса. Одна область имела вид плоскопараллельного слоя (или цилиндра), так что механизмом переноса примеси в ней была диффузия с коэффициентом диффузии D. Вторая область с коэффициентом диффузии d занимала всю оставшуюся часть пространства. Рассматривался случай *D* >> *d*. В данной постановке (авторы назвали ее моделью Дыхне) режим переноса вдоль хорошо проницаемой области оказывался зависящим от времени. При сильном различии коэффициентов диффузии, существовал достаточно большой интервал времени, в котором режим переноса описывался субдиффузией, а на малых и больших временах вне этого интервала режимом переноса была классическая диффузия, но с разными эффективными коэффициентами на больших и малых временах. Анализ поведения примеси в хвостах не проводился. Другим примером, в котором геометрия среды приводила к аномальным режимам, являлся перенос по гребешковым структурам [36, 37].

Для статистически однородных сред классическая модель двупористой среды была предложена в [38] и состоит в следующем. Среда миграции описывается как совокупность двух взаимопроникающих подсистем. В каждой подсистеме распределение примеси характеризуется локальной концентрацией, усредненной на масштабах больших характерных размеров неоднородностей (например, больше расстояния между трещинами). Перенос примеси по подсистемам описывается

классическими уравнениями адвекции-диффузии, каждому из которых приписывается свои средняя скорость адвекции и коэффициент дисперсии. На основе данной модели в последнее время активно развиваются численные коды [39, 40]. Следует отметить, что в рамках модели [38] скорость обмена примесью между подсистемами определяется разностью средних концентраций в данной области пространства. Отсюда следует, что для обоснованности модели необходимо, чтобы флуктуации концентрации на масштабах неоднородностей (например, на масштабах одного блока пористой матрицы, окруженного трещинами) были малы. Ниже в главе 5 будет показано, что для практически интересных случаев это условие может нарушаться.

Для описания переноса примеси обусловленного адвекцией в средах с фрактальными свойствами была предложена модель [41, 42], в которой полагалось, что флуктуирующее поле скоростей адвекции обладает дальнодействующими корреляциями (корреляторы флуктуаций скорости медленно, степенным образом убывают с расстоянием). В данной работе был рассмотрен только случай изотропной среды, со стационарным во времени полем распределения скоростей. Существенно, также, что здесь предполагалось, что флуктуации скорости малы. В итоге, при достаточно медленном убывании коррелятора перенос описывался супердиффузионным режимом. Следует отметить, что поведение примеси на асимптотически больших расстояниях в данной модели не рассматривалось.

Для моделирования переноса в средах с сорбцией, как правило, используется подход, когда для каждой фракции (например, растворенной и адсорбированной примеси) записываются законы сохранения массы, а обмен между фракциями описывается разностью средних концентраций. В литературе локальных рассматриваются среды с одним типом пористости. Для простых пористых сред равновесие между фракциями устанавливается быстро (по сравнению с характерными временами процессов переноса), что в итоге позволяет воспользоваться моделью равновесной сорбции. В этом случае концентрации растворенной и адсорбированной компонент однозначно связаны коэффициентом распределения, и система уравнений сводится к уравнению для одной компоненты (концентрации в растворе), которое сохраняет свой вид адвекции-диффузии, с перенормированными скоростью адвекции и коэффициентом дисперсии. Аналогично строятся модели для переноса с учетом сорбции на подвижных коллоидных частицах. В шестой главе диссертации будет показано, что для сред с двумя типами пористости такой подход является слишком

упрощенным, так как он не учитывает, что отклонения от равновесия в различных подсистемах могут сохраняться в течение долгого времени, что, в свою очередь, приводит к возникновению неклассических режимов переноса.

Таким образом, проведенный краткий обзор по проблеме неклассического переноса показывает, что данная тематика активно развивается. Однако ряд вопросов, таких как структура хвостов концентрации при различных неклассических режимах, влияние анизотропии, нестационарности поля скоростей, структуры перколяционного кластера и конечности корреляционного радиуса на перенос в перколяционных средах, роль резкого контраста свойств сред в формировании режимов переноса, остаются неисследованными.

В дальнейшем материал изложен в следующем порядке.

В главе 1 в рамках модели Дыхне проанализированы основные свойства переноса в регулярно-неоднородных контрастных средах. Описаны такие особенности переноса как смена режимов переноса во времени и многоступенчатость распределения концентрации на асимптотически больших расстояниях. Во второй главе развита модель изотропной случайной адвекции во фрактальной среде. Рассмотрено влияние конечной длины корреляции, а также зависящих от времени флуктуаций скорости. Третья глава посвящена анализу анизотропной среды. Рассмотрены случаи сильной и слабой анизотропии. Описано поведение в основном облаке и хвостах профиля концентрации. Проанализирован перенос при возникающем в такой системе аномальном дрейфе. В четвертой главе описывается перенос в перколяционных средах с конечной длиной корреляции. Пятая глава посвящена описанию модели и анализу режимов переноса в статистически однородных средах с двумя типами пористости. В главе 6 рассматриваются коллоидно-усиленный перенос в двупористых средах. В седьмой главе описан перенос примеси в периодических течениях, устойчивых и флуктуирующих во времени, обусловленных развитием тепловой конвекции в слое, нагреваемом снизу. В Заключении обобщены основные результаты работы.

ГЛАВА 1

РЕЖИМЫ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ В РЕГУЛЯРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Особенности неклассического переноса примеси в неоднородных, сильно контрастных средах проявляются уже в простых системах, в которых пространство миграции состоит из двух областей: область 1, заполненная средой с высокой проницаемостью, ограниченная в одном либо двух измерениях, и область 2 заполненная низко проницаемой средой, занимающей оставшуюся часть пространства. Перенос внутри каждой из сред определяется классическими механизмами: диффузией, либо адвекцией (если в среде имеет место течение жидкости, которая переносит растворенную примесь). Ниже в данной главе мы сначала (раздел 1.1) рассмотрим задачу, в которой физическим механизмом переноса в обеих областях является диффузия, причем коэффициент диффузии в первой области значительно превосходит коэффициент во второй. Эта модель была впервые описана в работе Дыхне и др. [35] применительно к задачам распространения примеси в трещиноватых скалах, поэтому ниже мы будем называть ее простой моделью Дыхне. В указанной работе [35] были определены режимы миграции частиц, оценены зависимости размера облака частиц от времени для каждого режима, и продемонстрирована смена режимов со временем. В настоящей работе будет проведено детальное исследование пространственновременных характеристик концентрации примеси, причем особое внимание уделено анализу структуры асимптотик концентрации на больших расстояниях. Далее, в разделе 1.2, будет рассмотрен случай, когда перенос в сильно проницаемой среде определяется также и адвекцией с постоянной скоростью, в то время как в области 2 только диффузией. Данную модель мы называем обобщенной моделью Дыхне.

1.1 Простая модель Дыхне

Постановка проблемы

Мы рассматриваем миграцию примеси в среде, состоящей из двух областей, 1 и 2, обладающих сильно различными транспортными свойствами. Мы рассмотрим две геометрические конфигурации области 1, характеризующимися числом измерений *l*, в которых эта область ограничена:

1. l = 1 описывает плоскопараллельный слой толщины a (Puc.1.1 a)),

2. l = 2 соответствует прямому цилиндру, (не обязательно круглого сечения) с площадью сечения $S \sim a^2$ (Рис.1.1 б)).



Рис. 1.1 Схематическое изображение области миграции: а) плоскопараллельный слой; б) прямой цилиндр.

В области 1 концентрация частиц примесей удовлетворяет классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n \tag{1.1}$$

Ниже мы будем называть $n(\vec{r},t)$ концентрацией активных частиц примеси.

Уравнение для концентрации частиц в области 2, $c(\vec{r},t)$, получается из (1.1) путем замен $n \to c$, $D \to d$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = d\Delta c \tag{1.2}$$

Мы рассматриваем случай сильно контрастной среды, так что:

$$D \gg d . \tag{1.3}$$

Как обычно, граничные условия заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Будем считать, что в начальный момент времени, t = 0, частицы сосредоточены в области 1, занимая объем размером R(0) < a.

Здесь и в дальнейшем, если особо не оговорено, R(t) означает размер области, содержащий основное количество частиц примеси. Этот размер фактически совпадает с корнем из дисперсии частиц σ^2 вдоль выделенного направления: $R = \sqrt{\sigma^2}$.

Начальное распределение частиц примеси обозначим $n^{(0)}(\vec{r})$. Рассмотрим поведение концентрации $n(\vec{r},t)$ на временах $t \gg t_0$ ($t_0 = a^2/4D$), когда распределение частиц в области 1 однородно по координатам l, вдоль которых она ограничена.

Проинтегрировав уравнение (1.1) по *l* координатам внутри области *I* и выполнив преобразование Фурье по остальным координатам и преобразование Лапласа по времени, приходим к алгебраическому уравнению

$$(p+Dk^2)n_{p,\vec{k}} + \frac{q_{p,\vec{k}}}{S_l} = \frac{n_{\vec{k}}^{(0)}}{S_l},$$
 (1.4)

где

$$n_{p,\vec{k}} = \int_{0}^{\infty} dt \int d^{3-l} r \exp\left(-pt - i\vec{k}\vec{r}\right) n\left(\vec{r},t\right),$$
(1.5)

 $q_{p,\vec{k}}$ есть Фурье-Лаплас образ плотности потока частиц через границу, отнесенной к единице ее площади для l = 1 и к единице длины для l = 2; \vec{r} и \vec{k} суть (3-l) мерные радиус-вектор и волновой вектор, соответственно, причем \vec{r} лежит в плоскости слоя для l = 1 и направлен вдоль оси цилиндра при l = 2; $n_{\vec{k}}^{(0)}$ есть Фурье образ начального распределения концентрации, проинтегрированного по l координатам; $S_1 = a$, $S_2 = S$. При выводе (1.4) полагалось, что начало координат находится внутри объема первоначальной локализации примеси.

Поскольку рассматриваемая задача линейна, связь между величинами $q_{p,\vec{k}}$ и $n_{p,\vec{k}}$ должна быть также линейна:

$$q_{p,\vec{k}} = S_l M\left(p,\vec{k}\right) n_{p,\vec{k}} \,. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.4), разрешая получающееся соотношение относительно $n_{p,\vec{k}}$ и выполняя обратные преобразования Фурье и Лапласа, приходим к общему выражению для концентрации активных частиц:

$$n(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}',t) \overline{n}^{(0)}(\vec{r}'), \qquad (1.7)$$

где $\overline{n}^{(0)}(\vec{r})$ - начальное распределение, усредненное по S_l , и $G(\vec{r},t)$ - функция Грина:

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^{3-l}\vec{k}}{(2\pi)^{3-l}} \frac{1}{Dk^2 + p + M(p,\vec{k})} \exp(i\vec{k}\vec{r} + pt), \quad \text{Re}\,b > 0, \quad (1.8)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать перенос примеси на временах, когда текущий размер облака примеси существенно превышает его значение в момент времени t = 0. Поэтому согласно (1.7) для концентрации активных частиц справедливо следующее выражение:

$$n(\vec{r},t) \cong \frac{N_0}{S_l} G(\vec{r},t).$$
(1.9)

где N_0 есть полное число частиц примеси, и вся информация о режимах переноса содержится в $G(\vec{r},t)$, которую мы и будем исследовать.

Также для описания режимов переноса мы будем использовать следующие характеристики $G(\vec{r},t)$:

доля активных частиц

$$\tilde{N}(t) = \int d^{3-l} \vec{r} G(\vec{r}, t), \qquad (1.10)$$

среднее смещение частиц $\langle \vec{r} \rangle$

$$\left\langle \vec{r} \right\rangle = \frac{1}{\tilde{N}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{3-l} \vec{r} \ G(\vec{r}, t) \vec{r} , \qquad (1.11)$$

и среднеквадратичная дисперсия $\sigma(t)$:

$$\left(\sigma_{\alpha}\left(t\right)\right)^{2} = \frac{1}{\tilde{N}\left(t\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{3-l} \vec{r} \ G\left(\vec{r},t\right) \left(r_{\alpha} - \left\langle r_{\alpha} \right\rangle\right)^{2}, \tag{1.12}$$

Данные величины, как легко показать выражаются через нулевые гармоники Фурье-Лаплас образа функции Грина:

$$\tilde{N}(t) = \int \frac{dp}{2\pi i} G_{p,k|k=0} \exp(pt)$$
(1.13)

$$\left\langle r_{\alpha}\right\rangle = \frac{i}{\tilde{N}(t)} \int \frac{\partial G_{p,k}}{\partial k_{\alpha}} \bigg|_{k=0} \exp(pt) \frac{dp}{2\pi i}$$
 (1.14)

$$\left\langle \boldsymbol{r}_{\alpha}^{2} \right\rangle = -\frac{1}{\tilde{N}(t)} \int \frac{\partial^{2} G_{p,\vec{k}}}{\partial \boldsymbol{k}_{\alpha}^{2}} \bigg|_{\boldsymbol{k}=0} \exp(pt) \frac{dp}{2\pi i}$$
(1.15)

$$\left(\sigma_{\alpha}\left(t\right)\right)^{2} = \left\langle r_{\alpha}^{2} \right\rangle - \left\langle r_{\alpha} \right\rangle^{2} \tag{1.16}$$

Заметим, что для сред с такой геометрией зависимость M от p и \bar{k} имеет специфический вид. Действительно, уравнение (1.2) в представлении Фурье-Лапласа представимо как

$$\left(p+dk^2+\Delta_{\perp}\right)c_{p\vec{k}}\left(\vec{r}_{\perp}\right)=0, \qquad (1.17)$$

где под Δ_{\perp} подразумевается сумма вторых производных по координатам \vec{r}_{\perp} , перпендикулярным поверхности, разделяющей области 1 и 2. Отсюда следует, что определенная соотношением (1.6) функция $M(p,\vec{k})$ зависит от своих аргументов следующим образом:

$$M\left(p,\vec{k}\right) = M\left(p+dk^{2}\right).$$
(1.18)

Исходя из этого, для анализа распределения концентрации в области, содержащей основное количество примеси (основном облаке примеси), удобно в выражении (1.8) удобно сделать замену переменной интегрирования:

$$p \to p' = p + dk^2. \tag{1.19}$$

Тогда функция Грина в представлении Фурье-Лапласа приобретает вид (ниже мы опускаем штрих над *p*):

$$G_{p\vec{k}} = G'_{p\vec{k}} \exp\left(-dk^2 t\right),$$
 (1.20)

где

$$G'_{p\vec{k}} = \left(Dk^2 + p + M(p)\right)^{-1}.$$
(1.21)

Здесь учтено $D - d \approx D$.

Используя свойства свертки, находим:

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{3-l}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{(3-l)} \vec{r}' G'(\vec{r}-\vec{r}',t) \exp\left(-\frac{\vec{r}'^2}{4dt}\right),$$
(1.22)

где функция $G'(\vec{r},t)$ дается обратным преобразованием Фурье-Лапласа функции $G'_{p\vec{k}}$, определенной в (1.21). Сама функция $G'(\vec{r},t)$ зависит от размерности области 1, l, и будет вычислена в каждом случае отдельно.

<u>Замечание 1</u>. Из (1.22) видно, что если характерный масштаб изменения функции $G'(\vec{r},t)$ много больше $\sqrt{4dt}$, то $\frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{3-l}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4dt}\right)$ можно рассматривать как δ -функцию, так что $G(\vec{r},t) \cong G'(\vec{r},t)$. В обратном случае

$$G(\vec{r},t) \cong \tilde{N}(t) \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{3-l}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4dt}\right),$$
 что как нетрудно видеть соответствует

классической трехмерной диффузии в медленной среде.

Следует отметить, что такая вспомогательная задача имеет вполне конкретную физическую реализацию. При определенных условиях, она соответствует задаче переноса примеси в гребешковых структурах, в которых слабо проницаемая среда представляется системой зубцов, вытянутых в направлении перпендикулярном направлению переноса примеси в сильно проницаемой среде. Подробнее об этом можно посмотреть в [37].

При анализе поведения функции Грина на асимптотически больших расстояниях мы будем исходить из представления (1.8) с учетом (1.18):

$$G(\vec{r},t) = 2 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^{3-l}\vec{k}}{(2\pi)^{3-l}} \frac{1}{Dk^2 + p + M(p+dk^2)} \exp(i\vec{k}\vec{r} + pt), \quad \text{Re}\,b > 0, \quad (1.23)$$

В этом случае переходя по \vec{k} к сферическим координатам, после интегрирования по угловым переменным, интеграл по dk определяется особой точкой $k_0(p)$ в верхней полуплоскости комплексной переменной $k = |\vec{k}|$, наиболее близко расположенной к вещественной оси Re k. Тогда (1.8) принимает вид

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} F(p) \exp\left(-k_0(p)r + pt\right), \quad \text{Re}\, b > 0, \quad (1.24)$$

где предэкспоненциальный множитель определяется $k_0(p)$. Учитывая, что нас интересуют большие значения r, интеграл берется методом перевала. Сама точка k_0

определяется видом $M(p+dk^2)$, который будет рассчитан для каждого случая отдельно.

Случай плоско-параллельного слоя *l* = 1.

В этом случае двумерный вектор в плоскости слоя $\vec{r} = (x, y)$, а координату вдоль нормали к плоской границе обозначим за z. Решение уравнения (1.1) с учетом граничных условий приводит к следующему выражению для концентрации частиц в среде 2 при $t \gg t_0$:

$$c_{p,\vec{k}} = n_{p,\vec{k}} \exp\left\{-\left(z - \frac{a}{2}\right)\sqrt{\frac{p + dk^2}{d}}\right\}, \quad z \ge \frac{a}{2}.$$
(1.25)

Из соотношения

$$q_{p,\vec{k}} = -2d \left. \frac{dc_{p,\vec{k}}}{dy} \right|_{z=+\frac{a}{2}}$$

и равенства (1.25) следует выражение для плотности потока частиц через границу (1-2).

Сравнивая результат с выражением (1.6), получаем

$$M\left(p,\vec{k}\right) = \sqrt{\frac{p+dk^2}{t_1}},\qquad(1.26)$$

где

$$t_1 = \frac{a^2}{4d} \tag{1.27}$$

есть характерное время диффузии частиц в среду 2 на расстояние ~ а.

Подстановка (1.26) в (1.8) и (1.13) дает

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{a} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{exp(i\vec{k}\vec{r}+pt)}{p+Dk^2 + \sqrt{\frac{p+dk^2}{t_1}}},$$
(1.28)

$$\tilde{N}(t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(pt)}{p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}}.$$
(1.29)

Рассмотрим поведение основного облака примеси. Переходя с помощью замены (1.19) к функции G', и интегрируя (1.28) по волновому вектору, приходим к выражению

$$G'(\vec{r},t) \cong \frac{1}{2\pi a D} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} K_0\left(r\sqrt{\frac{p+\sqrt{p/t_1}}{D}}\right)$$
(1.30)

Здесь $K_0(z)$ есть функция Макдональда, $r = |\vec{r}|$.

Для дальнейшего анализа мы воспользуемся довольно очевидным утверждением, что интервалы интегрирования по переменной *p* в уравнениях (1.29) и (1.30) есть

$$p \lesssim t^{-1}$$
 в (1.29) и (1.28) при $r \lesssim R(t)$, (1.31)

$$p >> t^{-1}$$
 в (1.28) при $r >> R(t)$. (1.32)

В интервале времени $t_0 \ll t \ll t_1$ (значения переменной Лапласа $p >> t_1^{-1}$) членом $\sqrt{p/t_1}$ в аргументе (1.30) можно пренебречь. Тогда после выполнения интегрирования в (1.30), с учетом формулы (1.22) и Замечания 1, приходим к выражению

$$G(\vec{r},t) \cong \frac{N_0}{4\pi a D t} \exp\left(-\frac{r^2}{4 D t}\right), \quad t_0 \ll t \ll t_1.$$
(1.33)

Для описания поведения концентрации на асимптотически больших расстояниях рассмотрим выражение (1.28). При $r \gg \sqrt{4Dt}$ перевальная точка имеет вид $p_* \approx \frac{r^2}{4Dt^2}$, что приводит к тому же выражению (1.33), как и следовало ожидать. Таким образом, (1.33) справедливо во всем диапазоне значений x. Зависимость (1.33) соответствует очевидному факту, что на временах $t_0 \ll t \ll t_1$ перенос примеси в среде 1 происходит в режиме быстрой (с коэффициентом D) двумерной классической диффузии. На Рис. 1.3 а) схематически изображено сечение облака примеси по нормали к границе слоя для этого интервала времени.

Для полного числа частиц из (1.29) с учетом $p \gg \sqrt{p/t_1}$ следует

$$\tilde{N}(t) \cong 1, \qquad t \ll t_1 \tag{1.34}$$

что также согласовано с (1.33).

Рассмотрим поведение концентрации на временах $t_1 << t << t_2$, где

$$t_2 = t_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2. \tag{1.35}$$

Согласно (1.31) теперь $p \ll \sqrt{p/t_1}$, и аргумент функции K_0 в области основного облака частиц ($r \leq R(t)$) аппроксимируется выражением $r(p/D^2t_1)^{1/4}$. Поэтому имеем

$$G'(\vec{r},t) = \frac{N_0}{8\pi a D t} F(\eta), \qquad \eta = \frac{r^2}{4D\sqrt{tt_1}} \qquad \text{при} \quad \eta \le 1,$$
(1.36)

где

$$F(\eta) = 4 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{du}{2\pi i} e^{u} K_0 \left(2\eta^{1/2} u^{1/4} \right).$$
(1.37)

Так как $K_0(z) \cong -\ln z$ при |z| << 1, из (1.37) находим F(0) = 1. В результате из (1.36) следует

$$G'(0,t) = \frac{N_0}{8\pi a D t}.$$
 (1.38)

Из выражений (1.36) и (1.37) вытекает оценка для размера основного облака частиц примеси:

$$R(t) \sim \left(4D\sqrt{tt_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 при $t_1 \ll t \ll t_2$, (1.39)

указывающая на суб-диффузионный режим переноса в этом временном диапазоне. С учетом (1.22) и замечания 1, получаем, что в этом временном диапазоне $G(\vec{r},t) \cong G'(\vec{r},t)$. Отметим, что (1.39) совпадает со среднеквадратичным смещением частиц полученным в [35].

Причиной появления субдиффузионного режима является то, что в среде *I*, где происходит быстрый перенос частиц примеси в продольном направлении, последние проводят лишь часть времени. Внутри облака примеси частицы распределены приблизительно однородно, поэтому можно оценить долю времени, проводимого частицей в трещине, как отношение объема, приходящегося на трещину, к полному объему облака. Размер облака примеси в направлении перпендикулярном плоскости трещины определяется обычной диффузией и при $t \gg t_1$ этот размер можно оценить как $\sim \sqrt{dt}$ (см. Рис. 1.3 б)). В итоге для $t \gg t_1$ для относительной доли времени, проводимой частицей в трещине имеем оценку $w(t) \sim a/\sqrt{dt}$. В итоге для среднеквадратичного смещения частиц вдоль трещины имеем

 $\langle r^2 \rangle \sim \int Dw(t')dt' \approx D \frac{a}{\sqrt{d}} \sqrt{t} = D\sqrt{t_1 t}$, что с точностью до числа совпадает с выражением (1.39).

Полное число активных частиц следует из (1.29) с учетом того, что теперь $p \ll \sqrt{p/t_1}$:

$$\tilde{N}(t) \cong \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}}, \qquad t \gg t_1. \tag{1.40}$$

Выражение для концентрации в пределе x >> R(t) (в «хвосте» концентрации) при $t_1 << t << t_2$ можно найти непосредственно из (1.30) путем использования соотношения $K_0(z)|_{z>>1} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$. Применяя далее метод стационарной фазы, получаем, что в диапазоне $1 << \eta << 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$ значение перевальной точки есть

$$p_* = \left(\frac{\eta}{4}\right)^3 t^{-1}$$
, так что справедлива асимптотика

$$G(\vec{r},t) \cong \frac{1}{2\sqrt{6}\pi a D t} exp\left\{-3\left(\frac{\eta}{4}\right)^{2/3}\right\}, \quad 1 << \eta << 4\left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}.$$
 (1.41)

При $\eta >> 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$ значение перевальной точки становится равным $p_* = \frac{r^2}{4Dt^2}$,

так что выражение для концентрации в точности совпадает с выражением (1.33).

Таким образом, видно, что при $t_1 \ll t \ll t_2$ асимптотика профиля концентрации на больших расстояниях состоит из двух частей. При этом более удаленная часть совпадает с выражением для концентрации на малых временах (1.33).

На рисунке 1.2 изображены результаты расчетов по формулам (1.33) и (1.41) для концентрации $lg\left(\frac{n}{n_0}\right)$ как функции $\frac{r^2}{4Dt}$ (сплошная линия). Показан двухступенчатый хвост концентрации (при $t_1 < t < t_2$). Субдиффузионная зависимость (1.41) сменяется (1.33), соответствующей классической диффузии. Для сравнения пунктирной линией

также показан хвост без учета смены режимов. При расчетах использовались значения $D = 10^{-5}$ см²/сек, $d = 10^{-6}$ см²/сек, a = 1 мм.



Рис. 1.2 Схематическое изображение двухступенчатого хвоста концентрации.

Перейдем теперь к анализу поведения концентрации на больших временах $t >> t_2$.

В этом случае характерный масштаб изменения функции $G'(\vec{r},t)$ по-прежнему определяется формулой (1.39) и на этих временах оказывается существенно меньше $\sqrt{4dt}$. Поэтому из (1.22) и замечания 1 следует, что концентрация в основном облаке определяется как $G(\vec{r},t) \cong \tilde{N}(t) \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{3-l}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4dt}\right)$. С учетом (1.40) получаем, что на

этих временах перенос описывается выражением

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a dt} \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}} \exp(-\xi) \equiv \frac{N_0}{\left(4\pi dt\right)^{3/2}} \exp(-\xi), \quad \xi = \frac{r^2}{4dt} \quad \xi \le 1,$$
(1.42)

что соответствует режиму медленной (с коэффициентом диффузии *d*) классической трехмерной диффузии (см. Рис. 1.3 в)). При этом доля частиц в области 1, попрежнему, продолжает убывать согласно (1.40).



δ
) t₁ ≪ t ≪ t₂



Рис. 1.3 Сечение облака примеси перпендикулярно плоскопараллельному слою l = 1, и вдоль оси цилиндра l = 2 для различных интервалов времени: а) быстрая классическая диффузия, $t_0 \ll t \ll t_1$; б) субдиффузия, $t_1 \ll t \ll t_2$; в) медленная классическая

диффузия, $t \gg t_2$.

Характерные значения переменной Лапласа в интеграле (1.28), приводящие к выражению (1.42), имеют порядок ξ/t . Поэтому формула (1.42) справедлива при $\xi << t/t_2$, и наряду с основным облаком, описывает также и ближнюю часть хвоста концентрации при условии $1 << \xi << t/t_2$. Если $\xi >> t/t_2$ при $t >> t_2$, то анализ (1.28) показывает, что перевальная точка сначала, в диапазоне $\left(\frac{t}{t_2}\right)^2 << \eta << 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$,

становится равной $p_* = \left(\frac{\eta}{4}\right)^{\frac{2}{3}} t^{-1}$, что для концентрации дает (1.41), а затем, при

$$\eta >> 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$$
, приобретает вид $p_* = \frac{r^2}{4Dt^2}$, что приводит к выражению (1.33).

В итоге, хвост концентрации на временах $t >> t_2$ состоит из трех различных по структуре частей, описываемых выражениями (1.42), (1.41), (1.33).

Таким образом, наблюдается общая закономерность: чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть асимптотики, тем более ранний по времени режим переноса определяет ее форму.

В завершении раздела оценим величину Δ – глубину проникновения частиц в среду *II*. Из формулы (1.25) следует, что $\Delta \sim \sqrt{d/p_*}$, где p_* есть характерная величина переменной p, дающая основной вклад при обратном преобразовании Лапласа. Из (1.31) и (1.32) следует, что $p_* \sim t^{-1}$ в области переменной \vec{r} , соответствующей основному облаку частиц в среде *I*, и $p_* \sim |\Gamma|t^{-1}$ для значений \vec{r} в хвостах профиля концентрации. Здесь Γ есть показатель экспоненты определяющей концентрацию в области r >> R(t).

Например, при $t_1 \ll t \ll t_2$ из (1.41) следует, что $|\Gamma| = 3 \left(\frac{\eta}{4}\right)^{2/3}$ в интервале $1 \ll \eta \ll 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$, а из (1.33) $|\Gamma| = \eta \sqrt{\frac{t_1}{t}}$ в интервале $\eta \gg 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}$.

Поэтому, мы имеем следующие оценки для глубины проникновения:

$$\Delta \sim \sqrt{dt} \qquad r \leq R(t), \qquad (1.43)$$

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{dt}{\Gamma}} \qquad r >> R(t). \qquad (1.44)$$

Случай прямого цилиндра l=2

В данном подразделе вектор \vec{r} имеет лишь одну координату x, направленную вдоль оси цилиндра, а радиус вектор \vec{r}_{\perp} - имеет две компоненты. Времена \tilde{t}_0 и \tilde{t}_1 определяются как

$$\tilde{t}_0 = \frac{S}{4\pi D}, \qquad \tilde{t}_1 = \frac{S}{4\pi d}.$$
(1.45)

Замечаем, что в интервале $\tilde{t}_0 \ll t \ll \tilde{t}_1$ концентрация в среде 2 имеет вид (1.25) и, аналогично (1.33) и (1.34), для частиц в среде 1 получаем следующие выражения

$$G(x,t) \cong \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \qquad \tilde{t}_0 \ll t \ll \tilde{t}_1, \qquad (1.46)$$
$$\tilde{N}(t) \cong 1;$$

которые соответствуют быстрой одномерной классической диффузии.

При значениях переменной Лапласа $p \ll \tilde{t}_1^{-1}$ и радиальной координаты $r_{\perp} >> \sqrt{S/\pi} \ (r_{\perp} = \left| \vec{r}_{\perp} \right|)$ концентрация в среде 2 описывается выражением

$$c_{s\bar{k}}\left(r_{\perp}\right) = 2n_{s\bar{k}} \frac{K_{0}\left(r_{\perp}\sqrt{\frac{p+dk^{2}}{d}}\right)}{\ln\left(\frac{H}{\left(p+dk^{2}\right)\tilde{t}_{1}}\right)}.$$
(1.47)

Здесь $H \sim 1$ зависит от формы сечения цилиндра. Вычисляя поток на границу раздела двух сред, приходим к выражению для M

$$M(p,k) = \left[\tilde{t}_1 \ln\left(\frac{H}{\left(p+dk^2\right)\tilde{t}_1}\right)\right]^{-1}$$
(1.48)

Действуя, как и при выводе (1.28), мы приходим к общему выражению для концентрации и полного числа активных частиц для l = 2 при $t >> \tilde{t_1}$:

$$G(x,t) = \frac{1}{S} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\exp(ikx+pt)}{p+Dk^2 + \left[\tilde{t}_1 \ln\left(\frac{H}{\left(p+dk^2\right)\tilde{t}_1}\right)\right]^{-1}},$$

$$\tilde{N}(t) \cong \tilde{t}_1 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \ln\left(\frac{H}{p\tilde{t}_1}\right) = N_0 \frac{\tilde{t}_1}{t}.$$
(1.49)

Как и в разделе 1.1.2, для анализа (1.49) важны неравенства (1.31)-(1.32). Кроме того величина \tilde{t}_2 теперь определяется как

$$\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 \frac{D}{d} \ln\left(\frac{D}{d}\right),\tag{1.51}$$

Анализ аналогичный проведенному в разделе 1.1.2 приводит к следующим результатам. На временах $t \ll \tilde{t}_2$ выражении (1.49) и выполняя интегрирование по k, p, получаем

$$n(x,t) = \frac{N_0}{S} \frac{\tilde{t_1}}{4t\sqrt{D\tilde{t_1}\ln\left(\frac{t}{\tilde{t_1}}\right)}} (1+\zeta) \exp(-\zeta)$$

$$\zeta = \frac{|x|}{\sqrt{D\tilde{t_1}\ln\left(\frac{t}{\tilde{t_1}}\right)}}, \quad \zeta \ll \frac{t}{\tilde{t_1}}.$$
(1.52)

Отсюда следует выражение для размера основного облака частиц

$$R(t) \sim \sqrt{D\tilde{t}_1 \ln\left(\frac{t}{\tilde{t}_1}\right)} \qquad \text{при} \quad \tilde{t}_1 \ll t \ll \tilde{t}_2, \qquad (1.53)$$

которое согласуется с выражением для дисперсии частиц, найденном в [35].

Отметим, что формула (1.52) определяет концентрацию частиц не только в основном облаке, но и в ближней части хвоста концентрации, когда $1 << \zeta << 2t/\tilde{t}_1$. Удаленная часть хвоста, соответствующая $\zeta >> 2t/\tilde{t}_1$, как и в случае l=1 (см. выражение (1.33)), описывается формулой (1.46). Таким образом, в случае прямого цилиндра дальняя асимптотика профиля концентрации при $\tilde{t}_1 << t << \tilde{t}_2$, так же как и в случае плоско-параллельного слоя, состоит из двух частей.

На больших временах, когда $t >> \tilde{t}_2$, в знаменателе (1.49) последнее слагаемое преобладает над первыми двумя, и после интегрирования мы приходим к формуле (1.42), описывающей концентрацию частиц в основном облаке и ближней части хвоста при условии $\xi \equiv (x^2/4dt) << t/\tilde{t}_2$

В диапазоне

$$t/\tilde{t}_2 \ll \xi \ll \frac{Dt}{d\tilde{t}_1} \ln\left(\frac{t}{\tilde{t}_1}\right),\tag{1.54}$$

Поведение в хвосте концентрации описывается формулой (1.52), а при условии

$$\xi >> \frac{Dt}{d\tilde{t}_1} \ln\left(\frac{t}{\tilde{t}_1}\right),\tag{1.55}$$

мы приходим к самой дальней асимптотике, соответствующей выражению (1.46). Таким образом, хвост концентрационного профиля на временах $t \gg \tilde{t}_2$, как и в случае l = 1, состоит из трех различных частей.

Видно, что, как и в случае плоско-параллельного слоя, чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть хвоста, тем более ранний режим переноса определяет ее форму.

В заключение раздела отметим, что глубина проникновения частиц в среду 2 для рассматриваемого здесь случая l = 2 определяется оценками (1.43) и (1.44), где значение показателя Γ следует брать из формул данного раздела. Например, при $t \gg \tilde{t}_2$ в интервале (1.54) Γ определяется формулой (1.52), а в интервале (1.55) - показателем экспоненты в первой формуле (1.46).

1.2 Обобщенная модель Дыхне

В отличие от модели, рассмотренной в п.п. 1.1.1-1.1.3, в обобщенной модели Дыхне механизмом переноса в сильно-проницаемой среде наряду с диффузией является также адвекция. Рассмотрим режимы переноса, возникающие в данной модели. Как и в простой модели Дыхне, мы проанализируем режимы переноса и асимптотики концентрации на больших расстояниях для двух различных конфигураций сильно проницаемой среды (Рис. 1.1 а), б)). При этом, как и в случае простой модели Дыхне мы сначала решим вспомогательную задачу, именно, проанализируем поведение функции Грина без учета продольной диффузии примеси по медленной среде (подразделы 2.1.1 и 2.1.2), а потом с учетом данного фактора опишем режимы переноса в обобщенной модели Дыхне (подразделы 2.2.1 и 2.2.2).

1.2.1 Вспомогательная задача

Плоскопараллельный слой *l* = 1

Уравнение для переноса примеси в среде 1 теперь имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{u} \nabla n = D\Delta n, \qquad (1.56)$$

где \vec{u} - скорость адвекции, а остальные обозначения те же, что и раньше.

Как и раньше будем считать, что в начальный момент времени t = 0 частицы сосредоточены в среде 1 и занимают объем размером R(0) < a. Начальное распределение обозначим $n^{(0)}(\vec{r})$. Выберем начало координат внутри объема R(0). Поведение концентрации $n(\vec{r},t)$ будем рассматривать на временах $t \gg t_0$. Тогда распределение активных частиц будет однородным по l направлениям, вдоль которых среда 1 ограничена.

Выражение для функции Грина с учетом решения уравнения (1.2) в среде 2 и подстановки его в граничные условия принимает вид (ср. с (1.28))

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{Dk^2 + i\vec{u}\vec{k} + p + \sqrt{\frac{p+dk^2}{t_1}}} \exp(i\vec{k}\vec{r} + pt), \quad \text{Re}\,b > 0$$
(1.57)

где вектор \vec{r} содержит две компоненты: продольную x (направленную вдоль скорости адвекции \vec{u}) и поперечную y.

Как и в случае простой модели Дыхне, с помощью замены (1.19) перейдем в (1.57) к функции G'. Проанализируем ее поведение.

Интегрируя полученное выражение по волновому вектору \vec{k} , получим:

$$G'(\vec{r},t) = \frac{\exp(\vec{u}\vec{r}/2D)}{2\pi D} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} K_0(\Lambda(p)ur/2D), \quad \text{Re}b > 0, \quad (1.58)$$

Здесь $r = |\vec{r}|$, K_0 - функция Макдональда нулевого порядка и

$$\Lambda(p) = \sqrt{1 + t_u \left(p + \sqrt{p/t_1}\right)} \tag{1.59}$$

где

$$t_u = \frac{4D}{u^2} \tag{1.60}$$

Очевидно, что в общем случае обратное преобразование Лапласа в выражении (1.58) выполнить невозможно. Однако существуют временные интервалы, когда функцию Грина удается получить в явном виде. Последовательность этих интервалов зависит от соотношения между характерными временами t_u и t_1 . Рассмотрим два случая: $t_u \ll t_1$ и $t_u \gg t_1$.

$$\mathbf{I} \ t_u \ll t_1$$

I.1. $t \ll t_u$

Этот случай равносилен пределу $u \to 0$, $t_1 \to \infty$. Поэтому здесь функция Грина принимает вид, соответствующий известному выражению двумерной классической диффузии:

$$G'(\vec{r},t) \cong \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right)$$
(1.61)

I.2. $t_u \ll t \ll t_1$

В этом интервале аргумент функции Макдональда в (1.58) много больше единицы, поэтому воспользуемся известной асимптотикой: $K_0(z) \simeq \sqrt{\pi/2z} \cdot e^{-z}, z \gg 1$, тогда:

$$G'(\vec{r},t) = \frac{\exp(\vec{u}\vec{r}/2D)}{2\sqrt{2\pi Dur}} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(-\Phi(p;r,t))}{\Lambda(p)}, \quad \text{Re}\,b > 0, \tag{1.62}$$

где

$$\Lambda(p) \cong 1 + \frac{t_u}{2} \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}} - \frac{1}{4} t_u p^2 \right), \tag{1.63}$$

$$\Phi(p;r,t) = \frac{r}{u} \left(\sqrt{\frac{p}{t_1}} - \frac{1}{4} t_u p^2 \right) - pt', \qquad (1.64)$$

 $c t' = t - \frac{r}{u} .$

Ниже мы убедимся, что структура G'-функции зависит от того, является ли текущее время t больше или меньше характерного времени $t_3 = (t_u t_1^2)^{1/3}$. Следовательно, случаи $t_u \ll t \ll t_3$ и $t \gg t_3$ необходимо проанализировать отдельно.

I.2a. $t_u \ll t \ll t_3$

Рассмотрим сначала область изменения пространственной переменной $\vec{\rho}$, в которой сосредоточена основная часть примеси (пик концентрации). Предположим, что для данного интервала времени существенные значения переменной интегрирования в (1.62) определяются слагаемым в экспоненте ~ p^2 из (1.64). Согласно структуре интеграла в (1.62) эти значения имеют порядок $p \sim (t_u t)^{-1/2}$. Для них слагаемое,

пропорциональное \sqrt{p} в (1.64), имеет оценку $\frac{r}{u}\sqrt{\frac{p}{t_1}} \sim \left(\frac{r}{ut_3}\right)^{3/4}$. Дальнейшие

вычисления покажут, что в основной области пространственная переменная *r* удовлетворяет неравенству *r* < *ut*. С учетом этого обстоятельства приходим к неравенству:

$$\frac{r}{u}\sqrt{\frac{p}{t_1}} < \left(\frac{t}{t_3}\right)^{3/4} \ll 1$$
, (1.65)

которое подтверждает сделанное выше предположение. Таким образом, слагаемым $\sim \sqrt{p}$ из (1.64) можно пренебречь при вычислении интеграла в (1.62). В итоге получаем:

$$G'(\vec{r},t) \cong \frac{1}{4\pi Dt} \exp\left(-\frac{\left(\vec{r}-\vec{u}t\right)^2}{4Dt}\right)$$
(1.66)

Данное выражение, как известно, характерно для двумерной классической адвекциидиффузии. Дрейфовый снос и дисперсия, соответственно, равны $\langle \vec{r} \rangle = \vec{u}t$, $\sigma = \sqrt{4Dt}$, откуда $\sigma \ll \langle \vec{r} \rangle$.

Выражение (1.66) справедливо там, где экспонента не слишком мала по сравнению с единицей. В далеких крыльях функции $G(\vec{r},t)$ (в асимптотиках) следует воспользоваться методом перевала при интегрировании в (1.62). С помощью уравнения $\frac{\partial}{\partial p_0} \Phi(p_0; r, t) = 0$, находим точку перевала $p_0 = -t'/2t_u t$. Нужно обратить внимание на то, что величина p_0 вещественна и имеет знак, противоположный знаку t'. Это значит, что выражение (1.64) продолжает быть справедливым в далеком правом крыле (т.е. при t' < 0) функции $G'(\vec{r}, t)$. Иная ситуация складывается для левого крыла, т.е. где t' > 0. Здесь точка перевала отрицательна. Поэтому при вычислении асимптотики следует учитывать вклад $-\delta_b G'$, возникающий от интегрирования по берегам разреза влево от точки ветвления функции $\Phi(p; r, t)|_{p=0}$. Упомянутая точка ветвления обусловлена присутствием слагаемого $\sim \sqrt{p}$ в (22), следовательно, членом $\sim p^2$ в (1.64) можно пренебречь. После подстановки (1.63) и (1.64) в (1.62) необходимо произвести разложение подынтегрального выражения до первого порядка по величинам ~ \sqrt{p} . В результате находим:

$$\delta G'_{b} = \frac{ut_{u} + 4r}{16\pi\sqrt{2Dru^{3}t_{1}t'^{3}}} \exp\left[-\frac{ur}{2D}(1 - \cos\varphi)\right],$$
(1.67)

где $\cos \varphi = x/r$.

Вклад (1.67) приводит к необычному поведению распределения концентрации на временах $t_u \ll t \ll t_3$. Обладая степенным убыванием $\propto (r - ut)^{-3/2}$, $\delta_b G'$ "перебивает" экспоненциальное убывание (1.66) на расстояниях относительно далеких от центра пика распределения. Сравнивая выражения (1.66) и (1.67), заключаем, что вклад (1.67) является определяющим, когда $t' > \sqrt{t_u t \ln(t_3/t)}$.

На временах $t_u \ll t \ll t_3$ мы имеем режим близкий к классической адвекциидиффузии (1.66) с почти симметричным гауссовым профилем концентрации, слегка "испорченным" присутствием степенного шлейфа (1.67).

I.2b. $t_3 \ll t \ll t_1$

В соответствии с оценкой (1.65), при переходе от интервала $t_u \ll t \ll t_3$ к интервалу $t \gg t_3$ слагаемые ~ p^2 и \sqrt{p} в (1.63) меняются ролями. Поэтому в данном случае справедлива аппроксимация:

$$\Lambda(p) \cong 1 + \frac{t_u}{2} \left(p + \sqrt{p/t_1} \right). \tag{1.68}$$

С учетом (1.68) из (1.62), находим:

$$G'(\vec{\rho},t) \cong \frac{ut_u + 4r}{16\pi\sqrt{2Dru^3 t_1 t'^3}} \exp\left[-\frac{ur}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{r^2}{4D_u t'}\right],$$
(1.69)

где

$$D_u = u^2 t_1. (1.70)$$

В асимптотических участках функции Грина следует при оценке интеграла (1.62) воспользоваться методом перевала. При t' > 0 имеют место две точки перевала. Естественно, принимать во внимание следует только ту из них, которая приводит к

меньшему значению показателя экспоненты. При $|t'| \gg t (t_u/2t_1)^{1/3}$ таковой является точка $p_0 = \frac{r^2}{4D_u {t'}^2}$. Её вклад сводится к выражению (1.69)).

В области $|t'| \ll t (t_u/2t_1)^{1/3}$ остается только одна точка перевала, $p_0 \cong (t_u^2 t_1)^{-1/3}$. Она дает вклад:

$$G'(\rho,t) \propto \exp\left(-3t/4t_3\right) \tag{1.71}$$

При отрицательных значениях переменной t' снова имеется только одна точка перевала $p_0 = -t'/2t_u t$, если t' < 0 и $|t'| \gg t (t_u/2t_1)^{1/3}$. Её вклад сводится к выражению (1.66).

Выражение (1.69) справедливо во всем интервале $t \gg t_3$. Однако, качественное поведение функции Грина существенно различается в двух случаях: $t_3 \ll t \ll t_1$ и $t \gg t_1$. На временах $t_3 \ll t \ll t_1$ дрейфовый снос: $\langle \vec{r} \rangle = \vec{u}t$, и дисперсия (ширина пика): $\sigma \sim ut^2/t_1$. Очевидно, что $\langle \vec{r} \rangle \gg \sigma$. Соответственно, \vec{r}^2 можно заменить на $(ut)^2$ в показателе экспоненты (1.69):

$$G'(\vec{r},t) \cong \frac{ut_u + 4r}{16\pi\sqrt{2Dru^3t_1t'^3}} exp\left[-\frac{ur}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{u^2t^2}{4D_ut'}\right].$$
(1.72)

Таким образом, реализуется режим классической адвекции-диффузии с резко ассиметричным профилем концентрации. При этом левое крыло распределения концентрации имеет форму степенного шлейфа. Правое крыло является сначала коротким экспоненциальным (1.69), а в далеком участке при $|t'| \gg t (t_u/2t_1)^{1/3}$, t' < 0 принимает классическую Гауссову форму (1.61).

Отметим появление степенного шлейфа позади пика концентрации на временах $t \ll t_1$. Причиной его возникновения является "временный" уход частиц в слабо проницаемую среду: по мере продвижения пика концентрации, часть активных частиц уходит в среду 2, затем пик двигается дальше, и позади него возникает обратный градиент концентраций, и чтобы восстановить равновесие частицы из среды 2 возвращаются в среду 1.

I.2c. $t \gg t_1$

Здесь дрейфовый снос и дисперсия имеют один порядок: $\langle \vec{r} \rangle \sim \sigma \sim \sqrt{D_u t}$ и $\sqrt{D_u t} \ll ut$. Следовательно, в выражении (1.69) t' можно заменить на t, если речь идет о пике распределения и первой ступени хвоста. В результате, находим:

$$G'(\vec{r},t) \cong \frac{ut_u + 4r}{16\pi\sqrt{2Dru^3t_1t^3}} \exp\left[-\frac{ur}{2D}(1 - \cos\varphi) - \frac{r^2}{4D_ut}\right]$$
(1.73)

Этот режим впервые был установлен в работе [43] и назван квазидиффузией. Несмотря на то, что в режиме квазидиффузии дисперсия зависит от времени по классическому закону $\sigma \sim t^{1/2}$, имеются два существенных отличие данного режима от классическ5ого режима адвекции-диффузии. Во-первых, при данном режиме полное количество активных частиц не сохраняется. Действительно, с помощью (1.13) нетрудно получить, что, как и в простой модели Дыхне, количество частиц в среде 1 убывает согласно формуле (1.40). И, во-вторых, как указано выше, среднее смещение и дисперсия имеют один порядок: $\langle \vec{r} \rangle \sim \sigma \sim \sqrt{D_u t}$, причем $\sqrt{D_u t} \ll ut$.

Вторая и третья ступени хвоста концентрации в данном интервале полностью совпадают с теми, которые получены для случая **I.2b.**

Полученные выше результаты описывают характеристики переноса примеси (среднее смещение и дисперсию) в продольном направлении. Посмотрим, как происходит перенос в поперечном направлении. Очевидно, что в случаях **I.1** и **I.2а.** реализуется классическая диффузия. В случае **I.2b.** показатель экспоненты (1.69) можно заменить на $y^2/4Dt$, если учесть, что $x \simeq ut$. Следовательно, снова имеет место классическая диффузия. Обратимся к случаю **I.2c.**, с учетом $\sigma \sim \sqrt{D_u t}$ находим, что показатель экспоненты в (1.73) $\approx \frac{y^2}{4D\sqrt{t_1t}}$. Таким образом, реализуется субдиффузия.

Итак, в поперечном направлении на временах $t \ll t_1$ имеет место классическая диффузия, а на временах $t \gg t_1$ - субдиффузия.

Принимая во внимание результаты, полученные для хвостов концентрации, убеждаемся в выведенной выше закономерности: с увеличением расстояний в хвостах осуществляется тот режим переноса, который был характерен для пика распределения в более раннем временном интервале. Принимая это обстоятельство во внимание, далее мы везде будем опускать подробный анализ хвостов концентрации.
$\mathbf{II} \ \underline{t_u} \gg t_1$

На временах меньших, чем t_u^2/t_1 следует использовать аппроксимацию:

$$\Lambda(p) \cong \frac{2}{u} \sqrt{D\left(p + \sqrt{p/t_1}\right)}, \qquad t \ll t_u \tag{1.74}$$

II.1. $t \ll t_1$

Этот случай полностью аналогичен случаю І.1.

II.2.
$$t_1 \ll t \ll t_u^2 / t_1$$

Членом порядка ~ *p* под корнем в выражении (1.74) следует пренебречь. Затем подставим (1.74) в (1.58) и в результате придем к формулам (1.36)-(1.37), соответствующим режиму степенной субдиффузии. Первую ступень хвоста найдем, воспользовавшись асимптотическим выражением для функции Макдональда: (1.41). Структура хвоста для данного интервала времени была получена для простой модели Дыхне в разделе 1.3.

II.3.
$$t \gg t_u^2/t_z$$

В этом интервале для основной области и первой ступени хвоста справедливо квазидиффузионное выражение (1.73). Вторая ступень определяется формулой (1.41), а третья – соответствует классическому диффузионному режиму (1.61).

В поперечном направлении снова получаем, что на временах $t \ll t_1$ реализуется классическая диффузия, а на временах $t \gg t_1$ - субдиффузия.

Прямой цилиндр l = 2

В случае прямого цилиндра функция Грина будет зависеть только от продольной координаты *x* и времени *t*.

В данном случае функция M(p), в логарифмическом приближении имеет вид (1.48)

При $t \gg \tilde{t}_1$ функция Грина *G*' (аналогично (1.62)) имеет вид:

$$G'(x,t) = \frac{1}{u} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp\left\{pt - \frac{xu}{2D}\left[\sqrt{1 + t_u(p + M(p))} - 1\right]\right\}}{\sqrt{1 + t_u(p + M(p))}}$$
(1.75)

В данном подразделе мы ограничимся описанием поведения частиц примеси в основном облаке. Асимптотически концентрации обсудим в разделе, посвященном обобщенной модели Дыхне.

Как и в разделе 3.1 возможны два случая: $t_u \ll \tilde{t}_1$ и $\tilde{t}_1 \ll t_u$.

$$\mathbf{I} \, \underline{t_u \ll \tilde{t}_1}.$$

I.1 $t \ll t_u$

$$G'(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$
(1.76)

Реализуется одномерная классическая диффузия.

I.2a. $t_u \ll t \ll t_3$

Здесь необходимо провести рассуждения аналогичные тем, что имели место в случае **I.2а.** из раздела 2.1. В итоге, пик распределения описывается одномерным аналогом выражения (1.66). Вычисление вклада, который в левом крыле распределения является определяющим вдали от пика, дает:

$$\delta_b G'(x,t) \cong \frac{ut_u + 2x}{4u^2} \frac{1}{\sqrt{\pi \tilde{t}_1 t'^3}}$$
(1.77)

I.2b. $t_3 \ll t \ll \tilde{t}_1$

Для этого интервала опять-таки воспользуемся соображениями, как и в случае **I.2b.** раздела 2.1. Тогда получаем режим квазидиффузии:

$$G'(x,t') = \frac{x + ut_u/2}{ut'} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_u t'}} \cdot exp\left(-\frac{u^2 t^2}{4D_u t'}\right)$$
(1.78)

I.2c. $t \gg \tilde{t}_1$

В этом интервале появляется новый режим переноса:

$$G'(x,t) \approx \sqrt{\frac{t_1}{t}} \frac{1}{\pi R_2(t)} \left(\frac{ut_u + x}{R_2(t)}\right) \exp\left(-\frac{x}{R_2(t)}\right)$$
(1.79)

где

$$R_2(t) = u\tilde{t}_1 \ln t/\tilde{t}_1 \tag{1.80}$$

Он хотя и логарифмический, но приводит к более быстрому распространению примеси, чем субдиффузионный логарифмический режим в простой модели Дыхне (см. [35]).

II $\tilde{t}_1 \ll t_u$

II.1 На временах $t \ll \tilde{t}_1$ реализуется одномерная классическая диффузия (1.76). **II.2.a** При $\tilde{t}_1 \ll t \ll \tilde{t}_3$,

где

$$\widetilde{t}_3 = t_1 \exp\left(\frac{t_u}{t_1}\right),\tag{1.81}$$

имеем логарифмическую субдиффузию (1.52).

II.1.3. $t \gg \tilde{t}_3$ - справедливо выражение (1.79).

Отметим, что в случае цилиндрической геометрии на временах $t \gg \tilde{t}_1$ полное число активных частиц убывает как

$$N(t) \cong N_0 \frac{\tilde{t}_1}{t} \tag{1.82}$$

1.2.2 Режимы переноса и асимптотики концентрации

Теперь, воспользовавшись результатами предыдущего раздела, формулой (1.22) и замечанием 1, рассмотрим поведение концентрации примеси в обобщенной модели Дыхне.

Для описания асимптотического поведения концентрации мы будем исходить из установленной закономерности, что при смене режимов переноса в основном облаке со временем, структура хвостов концентрации активных частиц становится многоступенчатой: чем дальше мы отдаляемся от основного облака, тем более ранний, из уже реализованных, режим переноса описывает поведение в хвосте. Поэтому мы сочли целесообразным не выписывать каждый раз структуру формирующегося хвоста, а ограничиться описанием последовательности реализующихся режимов переноса в основном облаке, откуда структура хвоста без труда восстанавливается.

Случай плоскопараллельного слоя (l = 1, Рис. 1.1а))

В данном случае перенос в поперечном направлении происходит так же, как и в простой модели Дыхне.

В продольном направлении поведение концентрации зависит от соотношения между параметрами t_1 и t_u .

1) Если $t_u \gg t_1 D/d$, адвекция, практически, не влияет на формирование профиля концентрации. Здесь можно считать $u \to 0$, тогда функция Грина полностью совпадает с выражением (1.8), и миграция примеси происходит также как в простой модели Дыхне: при $t \ll t_1$ имеет место классическая диффузия (1.33), далее при $t_1 \ll t \ll t_2$, где t_2 определяется формулой (1.35), следует режим субдиффузии (1.36)-(1.39), и затем при $t \gg t_2$ наступает медленная классическая диффузия (1.42).

2) Если характерные времена связаны соотношением $t_1 \ll t_u \ll t_1 D/d$ имеет место следующая последовательность режимов: при $t \ll t_1$ - классическая двумерная диффузия (1.33), далее, при $t_1 \ll t \ll t_u^2/t_1$ - субдиффузия (1.36)-(1.39), а затем при $t_u^2/t_1 \ll t$ - квазидиффузия (1.73).

3) При столь больших значениях скорости u, что $t_u \ll t_1$, реализуются следующие режимы: $t \ll t_u$ - классическая двумерная диффузия (1.33), $t_u \ll t \ll t_3$ -классическая адвекция-диффузия (1.66), $t_3 \ll t \ll t_1$ - адвекция-диффузия с резко асимметричным профилем (1.69), $t_1 \ll t$ - квазидиффузия (1.73).

Отметим, что в случаях 2) и 3) режим медленной диффузии не наступает, так как дисперсия, определяемая переносом по быстрой среде $\sigma' \sim \sqrt{D_u t}$ оказывается больше дисперсии, определяемой режимом (1.42).

Случай прямого цилиндра (l = 2, Рис. 1.1б))

В этом случае, задача для активных частиц является одномерной. Последовательность режимов переноса определяется соотношением между параметрами t_u , \tilde{t}_1 и $\frac{D}{d}$.

1) При $\tilde{t}_1 \ln D/d \ll t_u$ задача полностью совпадает со случаем прямого цилиндра простой модели Дыхне. Действительно, на временах $t \ll t_u$ адвекция вообще роли не играет. Более того, при условии $\tilde{t}_1 \ln D/d \ll t_u$ время t_u оказывается настолько велико, что влияние адвекции на перенос примеси оказывается пренебрежимо малым и на временах $t \gg t_u$ – перенос частиц в слабопроницаемой среде вносит куда более значительный вклад.

В итоге, из результатов для простой модели Дыхне следует: на временах $t \ll \tilde{t}_1$ имеет место классическая одномерная диффузия (1.76); на временах $\tilde{t}_1 \ll t \ll \tilde{t}_2$ логарифмическая субдиффузия (1.52); и, наконец, когда $t \gg \tilde{t}_2$ - медленная классическая диффузия (1.42), где

$$\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d}, \qquad (1.83)$$

и в (1.42) мы должны положить r = x.

2). При
$$\tilde{t}_1 \ll t_u \ll \tilde{t}_1 \ln \frac{D}{d}$$
, реализуется последовательность режимов (1.76), (1.52),

(1.79), после чего при $t >> \tilde{t}_2^{-1}$, где

$$\tilde{t}_2^1 = \tilde{t}_1 \frac{D_u}{d} \ln^2 \frac{D_u}{d} \tag{1.84}$$

устанавливается режим медленной диффузии (1.42).

3) При $t_u \ll \tilde{t}_1$ систематика режимов переноса следующая. Вплоть до времени \tilde{t}_2^1 сохраняется последовательность режимов (1.76), (1.66) с левым крылом (1.77), (1.78), и (1.79), после чего, при $t \gg \tilde{t}_2^1$ доминирующей становится медленная классическая диффузия (1.42).

Отметим, что для прямого цилиндра при любом соотношении между \tilde{t}_1 и t_u окончательным режимом является режим медленной диффузии (1.42).

1.3 Краткие выводы

В данной главе описаны режимы переноса примеси, возникающие в сильно контрастных средах простой конфигурации (плоскопараллельный слой и прямой цилиндр). В качестве механизма переноса в хорошо проницаемой среде рассматривались как диффузия (простая модель Дыхне), так и адвекция с постоянной скоростью (обобщенная модель Дыхне).

Показано, что в зависимости от геометрических характеристик (плоскопараллельный слой и прямой цилиндр) и параметров переноса в средах (коэффициентов диффузии и скорости адвекции) возможно возникновение целого спектра режимов переноса: диффузии с различными коэффициентами диффузии, адвекции-диффузии, квазидиффузии, степенной и логарифмической субдиффузии (двух типов). Причем с течением времени происходит смена режимов переноса.

Интересно отметить различие в поведении системы на больших временах для двух описанных конфигураций хорошо проницаемой среды. Для плоскопараллельного слоя окончательный режим зависит от соотношения между параметрами, и для достаточно больших скоростей адвекции он остается квазидиффузионным, когда скорость переноса определяется свойствами как быстрой, так и медленной сред. При скорости меньше некоторой критической, окончательный режим - классическая диффузия, определяемая медленной средой (медленная диффузия). Для цилиндрической геометрии мощность ловушек столь велика, что окончательным режимом всегда является медленная классическая диффузия (диффузия по медленной среде.

Была установлена важная закономерность, что смена режимов переноса с увеличением времени приводит к сложной структуре асимптотики профиля концентрации на больших расстояниях (хвостов концентрации). Данная структура была описана для рассмотренных сред и показано, что в общем случае, чем дальше фрагмент хвоста удален от источника, тем более ранний режим переноса частиц в основном облаке определяет его форму. Отметим, что на больших временах даже когда перенос в основном облаке определяется медленной средой, структура хвостов концентрации будет определяться как медленной так и быстрой компонентами среды.

Для рассмотренных типов сред полное число активных частиц (локализованных в среде с высокой проницаемостью) уменьшается во времени со скоростью, зависящей от геометрии среды: обратно пропорционально корню из времени для плоскопараллельного слоя и первой степени времени для прямого цилиндра.

Глубина проникновения частиц в слабопроницаемую среду имеет обычную классическую диффузионную величину в области основного облака частиц и существенно подавляется в области хвостов.

ГЛАВА 2

ПЕРЕНОС ВО ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕДАХ. МОДЕЛЬ ИЗОТРОПНОЙ СЛУЧАЙНОЙ АДВЕКЦИИ

В данной главе мы переходим к рассмотрению переноса примеси в случайно неоднородных средах. Будем рассматривать наиболее важный с практической точки зрения случай, когда перенос по хорошо проницаемым областям определяется адвекцией. Важность этого случая обусловлена тем, что распространение загрязнений в геологических формациях в основном происходит в виде раствора, которых переносится грунтовыми водами по пустотам (порам, трещинам).

Учитывая, что поле скоростей потока грунтовых вод определяется пространственным расположением каналов, по которым происходит просачивание жидкости, или, в более общем случае, распределением проницаемости, можно выделить два типа сред. В средах первого типа флуктуации проницаемости (и, следовательно, скорости адвекции) распределены однородно по пространству. В этом случае локальные флуктуации скорости по порядку равны ее средней величине. Перенос в таких статистически однородных средах будет рассмотрен ниже в главе 5.

Другой тип сред носит название перколяционных [13, 44]. Важной особенностью перколяционой среды является наличие макроскопического (много больше характерных размеров неоднородностей) пространственного размера ξ (так называемой, корреляционной длины ξ), такого, что на масштабах меньших ξ среда обладает фрактальными свойствами. В этом случае хорошо проницаемые области среды (по которым и происходит течение жидкости) образуют фрактальные (самоподобные) кластеры. При просачивании жидкости в такой среде амплитуда скорости оказывается существенно флуктуаций больше среднего значения (определяемого среднее по ансамблю реализаций как среды). И именно скоррелированные флуктуации скорости определяют режим переноса примеси. Для таких, фрактальных, сред плодотворным подходом оказалась модель случайной адвекции [41, 42], построенная в предположении, что корреляционная функция флуктуаций скорости убывает с расстоянием медленно (степенным образом).

На масштабах больше корреляционной длины ξ данные среды становятся статистически однородными. На этих масштабах корреляционная функция скорости

убывает быстро с расстоянием (экспоненциально), и можно ожидать, что перенос в основном облаке (но не в хвостах!) будет описываться классическими закономерностями, при которых среднее смещение частиц (при средней скорости отличной от нуля) и дисперсия растут линейно со временем ($\sim t$).

В этой и следующей главах будут рассмотрены особенности переноса, обусловленных адвекцией в таких фрактальных средах. В данной главе представлена модель случайной адвекции для фрактальных сред с бесконечным (раздел 2.1) и конечным (раздел 2.2) радиусом корреляции ξ . Модель построена в предположении, что поле скоростей адвекции стационарно во времени. В разделе 2.3 будет рассмотрено влияние динамических флуктуаций скорости на режим переноса.

2.1 Фрактальная среда с бесконечным радиусом корреляции

2.1.1 Постановка задачи и основные соотношения

Основным уравнением модели случайной адвекции является уравнение для концентрации частиц $c(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \left(\vec{v} c \right) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ есть скорость адвекции. Величина $\vec{v}(\vec{r})$ есть случайная (независящая от времени) функция координат. На данном этапе развития модели будем полагать, что

$$\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle = 0 \tag{2.2}$$

где $\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle$ есть величина скорости, усредненная по ансамблю реализаций среды. В дальнейшем будем считать, что жидкость несжимаема:

$$div\,\vec{v}=0\,.\tag{2.3}$$

Применительно к течению жидкости в геологических формациях для данного условия имеются следующие обоснования. Мы рассматриваем стационарное движение жидкости, следовательно, производная по времени в точном (микроскопическом) уравнении непрерывности массы равна нулю: $div\rho\vec{v} = 0$. Плотность жидкости $\rho = const$ внутри каналов, по которым происходит течение жидкости, и равна нулю вне

каналов, поэтому плотность может быть вынесена из под знака дивергенции. Отсюда следует уравнение (2.3).

Мы считаем, что рассматриваемая среда обладает на масштабах r >> a фрактальными свойствами (a носит название нижней границы фрактальности или ближнего радиуса корреляции). Это означает, что в этой области отсутствует пространственный масштаб, характеризующий систему, что, в свою очередь, позволяет воспользоваться идеями теории критических явлений [46, 47] и полагать, что процесс переноса на расстояниях r >> a обладает свойством масштабной инвариантности. Другими словами, макроскопические уравнения переноса (и, вообще, соотношения между физическими величинами) должны быть инвариантны относительно преобразований

$$\vec{r} \to s\vec{r}$$
 (2.4)

при одновременном преобразовании всех величин, входящих в уравнения (2.7) и (2.8) согласно

$$A \to s^{-\Delta_A} A \tag{2.5}$$

где показатель Δ_A есть масштабная размерность величины A.

Отсюда, в частности, следует, что корреляционная функция скорости должна убывать с расстоянием по степенному закону, так что *n*-точечный коррелятор, определяемый $K_{i_1i_2...i_n}^{(n)}(\vec{r_1},\vec{r_2},...,\vec{r_n}) = \langle v_{i_1}(\vec{r_1})v_{i_2}(\vec{r_2})...v_{i_n}(\vec{r_n}) \rangle$, должна быть однородной функцией порядка –*nh* при $|\vec{r_i} - \vec{r_j}| \gg a$ (для всех пар $\vec{r_i}$, $\vec{r_j}$). Здесь показатель h > 0). Мы также считаем, что среда изотропна и пространственно однородна. Тогда для парной корреляционной функции $K_{ij}^{(2)}(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \equiv \langle v_i(\vec{r_1})v_j(\vec{r_2}) \rangle$ мы можем написать

$$K_{ii}^{(2)}\left(\vec{r}_{1}-\vec{r}_{2}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a}{\left|\vec{r}_{1}-\vec{r}_{2}\right|}\right)^{2h}, \quad \Pi \mathsf{pu} \quad \left|\vec{r}_{1}-\vec{r}_{2}\right| >> a,$$
(2.6)

где V^2 есть характерная величина $K^{(2)}_{ij}(\vec{r})$ при $|\vec{r}| \leq a$.

Концентрация примеси, усредненная по ансамблю реализаций, $\overline{c}(\vec{r},t) \equiv \langle c(\vec{r},t) \rangle$, удовлетворяет стандартному макроскопическому уравнению, выражающему закон сохранения частиц:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + div \overline{q} = 0 \tag{2.7}$$

Здесь $\vec{q}(\vec{r},t)$ есть макроскопическая плотность потока, удовлетворяющая очевидному требованию – она равна нулю при однородном распределении концентрации. Учитывая также принцип причинности и линейность задачи, для $\vec{q}(\vec{r},t)$ справедливо выражение

$$q_{i}\left(\vec{r},t\right) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}' f_{ij}\left(\vec{r}',t'\right) \frac{\partial \overline{c}\left(\vec{r}-\vec{r}',t-t'\right)}{\partial r_{j}}$$
(2.8)

Тензорная функция отклика $f_{ij}(\vec{r},t)$ определяется распределением скоростей и должна удовлетворять требованию положительной определенности:

$$f_{ij}(\vec{r},t)s_is_j > 0 \tag{2.9}$$

где *š* есть произвольный вектор, что является следствием принципа возрастания энтропии.

Для определенности мы рассмотрим задачу с начальными условиями, $\overline{c}(\vec{r},0) = c^{(0)}(\vec{r})$. Тогда усредненная концентрация $\overline{c}(\vec{r},t)$ и начальное распределение $c^{(0)}(\vec{r}')$ связаны соотношением:

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) = \int d\vec{r}' G\left(\vec{r}-\vec{r}',t\right) c^{(0)}\left(\vec{r}'\right)$$
(2.10)

Фурье-Лаплас образ функции Грина $G(\vec{r},t)$ согласно уравнениям (2.7) и (2.8) есть

$$G_{\vec{k}p} = \left[p - M\left(k,p\right) \right]^{-1}$$
(2.11)

где

$$M(k,p) = -k_i k_j \int_{0}^{\infty} dt e^{-pt} \int d^3 r e^{-i\vec{k}\vec{r}} f_{ij}(\vec{r},t)$$
(2.12)

Здесь и далее $k \equiv \left| \vec{k} \right|, \ r \equiv \left| \vec{r} \right|.$

2.1.2 Масштабный анализ

Как указано выше из свойств фрактальности среды следуют ее свойства масштабной инвариантности, выражаемой преобразованиями (2.4), (2.5). Определим с помощью этих преобразований масштабные размерности величин входящих в теорию.

Масштабные размерности скорости, концентрации и функции Грина следуют из соотношения (2.6) и свойства сохранения полного числа частиц:

$$\Delta_{\nu} = h, \qquad \Delta_{c} = \Delta_{G} = 3. \tag{2.13}$$

Соотношения (2.7) и (2.8) дают возможность установить соотношения между масштабными размерностями времени и плотности потока:

$$\Delta_t = 2 - \Delta_q \tag{2.14}$$

С учетом соотношений (2.13) и (2.14) равенство $\vec{q} = \langle \vec{v}c \rangle >$ приводит к следующим выражениям:

$$\Delta_a = h + 3 \tag{2.15}$$

$$\Delta_t = -(1+h) \tag{2.16}$$

Также, используя (2.8), (2.15), (2.16) легко получить

$$\Delta_f = 2h + 3 \tag{2.17}$$

Подчеркнем, что полученные соотношения справедливы только при условии, что свойства переноса определяются длинноволновой частью коррелятора скорости (см. ниже).

2.1.3 Поведение концентрации

Результаты масштабного анализа дают основу для описания поведения концентрации. Согласно результатам предыдущего раздела, функцию отклика $f_{ij}(\vec{r},t)$ можно представить в виде

$$f_{ij}(\vec{r},t) = \frac{\left(Va^{h}\right)^{2}}{r^{2h+3}} \chi_{ij}(\vec{n},\xi), \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \xi = \frac{r}{\left(a^{h}Vt\right)^{1/(1+h)}} \quad at \quad r >> a;$$
(2.18)

$$f_{ij}\left(\vec{r},t\right) \sim \frac{V^2}{a^3} \quad at \qquad r \leq a. \tag{2.19}$$

Здесь $\chi_{ij}(\vec{n},\xi)$ есть безразмерная тензорная функция.

Рассмотрим свойства функции Грина (и, следовательно, поведение концентрации) в зависимости от величины индекса h. Рассмотрим случаи h > 1, h < 1 и h = 1 по отдельности.

1. h > 1.

Из соотношений (16) и (17) видно, что основной вклад в интегралы по переменным \vec{r} и t в (2.12) дают значения $r \leq a$, $t \leq a/V$. Поскольку нас интересует распределение концентрации на масштабах (r >> a, t >> a/V), мы можем в подынтегральном выражении (2.12) положить $\exp(-i\vec{k}\vec{r} - pt) \cong 1$. Это приводит к

$$M = Dk^2, \qquad D \sim Va. \tag{2.20}$$

Подставляя данные выражения в соотношение (2.11), получаем $G_{\bar{k}p} = [p + Dk^2]^{-1}$, что есть ни что иное как Фурье-Лаплас образ функции Грина для уравнения $\partial \overline{c} / \partial t = D\Delta \overline{c}$. Поэтому можно утверждать, что при h > 1 перенос происходит в режиме классической диффузии.

Заметим, что в данном случае масштабная размерность времени $\Delta_t = -2$ отличается от результата, даваемого формулой (2.16). Это является следствием того, что перенос при h > 1 определяется мелкомасштабным поведением коррелятора скорости, так что масштабная инвариантность не имеет места.

2. *h* < 1.

Как видно из соотношений (2.18) и (2.19), в этом случае вклад больших значений пространственной переменной (*r* >> *a*) в интеграл (2.12) является определяющим по сравнению с малыми значениями (*r* ≤ *a*). Подставляя в интеграл (2.12) выражение (2.18), получаем

$$M(k,p) = -k_i k_j \int_0^\infty dt \, e^{-pt} \int d^3 r e^{-i\vec{k}\vec{r}} \, \frac{\left(Va^h\right)^2}{r^{2h+3}} \, \chi_{ij}\left(\vec{n},\xi\right).$$
(2.21)

Отсюда следует важное соотношение для массового оператора:

$$M(k,p) = -p\phi(\eta), \quad \eta = k^2 \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{-\frac{2}{1+h}}.$$
(2.22)

С учетом этого выражения функция Грина

$$G\left(\vec{r},t\right) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p-M\left(k,p\right)}, \quad \text{Re}\,b>0$$
(2.23)

(см. (2.11)) представима в виде

$$G(\vec{r},t) = \left(a^{h}Vt\right)^{-3/(1+h)}g(\xi)$$
(2.24)

где $g(0) \neq 0, \infty$ и $g(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$. Из выражения (2.24) следует, что на больших временах размер облака примеси растет со временем по аномальному закону

$$R(t) \sim (a^h V t)^{1/(1+h)}, \quad h < 1$$
 (2.25)

который соответствует супер-диффузионному режиму переноса. Данный вывод совпадает с результатами, полученными в работах [41, 42].

Теперь перейдем к рассмотрению поведения функции Грина (и, следовательно, концентрации) при асимптотически больших расстояниях, $\xi >> 1$, то есть когда r >> R(t). Выполнив в (2.23) интегрирование по углу и принимая во внимание свойство массового оператора M(-k, p) = M(k, p) мы приходим к выражению

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{r} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{k \, dk}{(2\pi)^2 i} \, \frac{e^{ikr+pt}}{p-M(k,p)}.$$
 (2.26)

Чтобы описать поведение функции Грина на больших расстояниях необходимо знать аналитические свойства подынтегрального выражения в (2.26). Как будет видно из дальнейшего, основной вклад в интеграл (2.26) при $\xi >> 1$ определяется значениями переменной Лапласа $|\text{Im } p| \ll \text{Re } p$, Re p > 0. Исходя из этого, нас будут интересовать аналитические свойства при Im p = 0, p > 0. Мы рассмотрим поведение массового оператора M(k, p) в двух предельных случаях: $p \neq 0, k \rightarrow 0$ и $k \neq 0, p = 0$.

При $p \neq 0$, сходимость интеграла по t в выражении (2.21) обеспечивается множителем e^{-pt} . Зависимость M(k, p) от переменной k в этом случае определяется скоростью убывания функции $f_{ij}(\vec{r},t)$ при $r \to \infty$. Легко видеть, что $f_{ij}(\vec{r},t)$ при больших r убывает быстрее любой обратной степени. Действительно, сам факт существования корреляционной функции скорости любого порядка означает, что распределение по скоростям определяется функционалом, убывающим при больших

значениях скорости очень быстро. То есть по сути это означает, поле скоростей фактически ограничено по величине. Это, в свою очередь, означает, что убывание функции $f_{ij}(\vec{r},t)$ при $\vec{r} \to \infty$ происходит так быстро, что существуют ее любые степенные моменты. Поэтому точка $k = 0, p \neq 0$ является регулярной для функции M(k,p) и мы можем написать для массового оператора следующее выражение при $p \neq 0, |\eta| <<1$:

$$M(k,p) = -p \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n, \quad \eta = k^2 \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{-\frac{2}{1+h}}.$$
 (2.27)

В другом предельном случае, когда $k \neq 0$, p = 0 и Im k = 0, из (2.21) имеем:

$$M(k,0) \cong -AVa^{h}k^{1+h}, \qquad (2.28)$$

где константа A > 0 вследствие соотношения (2.9).

Установленные свойства позволяют нам считать массовый функцию -M(k, p) как действительную, положительную и аналитичную функцию своих переменных, когда k и p являются действительными и конечными. Это означает, что подынтегральное выражение в (2.26) не имеет особенностей на действительной оси k, и следовательно асимптотическое убывание G-функции на больших расстояниях не является степенным. Таким образом, в модели случайной адвекции не существует тяжелых (степенных) хвостов.

Из выражения (2.26) следует, что при действительных p ближайшие к действительной оси k особые точки M(k, p) находится на мнимой k-оси. Согласно выражениям (2.21), (2.22) и (2.28) данные особые точки являются точками ветвления, $k = \pm i \kappa_b$, вблизи которых массовый оператор описывается приближенным выражением

$$M(k,p) \cong -BVa^{h} \frac{k^{2}}{p^{(1-h)/(1+h)}} (\eta - \eta_{b})^{-(1-h)}, \quad \eta_{b} = -\kappa_{b}^{2} \left(\frac{p}{Va^{h}}\right)^{-\frac{2}{1+h}} < 0, \quad B > 0.$$
(2.29)

Согласно (2.22), функция M(k, p) на интервале $(-i\kappa_b, i\kappa_b)$ мнимой оси является действительным и положительным при Im p = 0. В то же время из (2.29) видно, что эта функция стремится к бесконечности при $k \to \pm i\kappa_b$. Отсюда мы приходим к

заключению, что ближайшими к вещественной оси k особенностями в подынтегральном выражении (2.26) при Im p = 0 являются полюсы $k = \pm i\kappa_0$, где $0 < \kappa_0 < \kappa_b$. Согласно (2.22) величина $\kappa_0 \equiv \kappa_0(p)$ определяется уравнением:

$$\phi(\eta_0) + 1 = 0, \quad \kappa_0(p) = \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{\frac{1}{1+h}} \sqrt{|\eta_0|}, \quad \eta_0 < 0.$$
 (2.30)

Теперь, имея ввиду предел $\xi >> 1$ (r >> R(t)) для G-функции, сдвигая контур интегрирования в комплексной k-плоскости вверх, мы приходим в (2.26) к выражению:

$$G(\vec{r},t) \cong \frac{1}{4\pi i r \phi'(\eta_0)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{2\pi i p} \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{\frac{2}{1+h}} \exp\left\{-\Gamma\left(p;r,t\right)\right\},\tag{2.31}$$

где

$$\Gamma(p;r,t) = \kappa_0(p)r - pt. \qquad (2.32)$$

При интегрировании в (2.31) при $\xi >> 1$ основной вклад дают значения переменной p для которых $|\Gamma| >> 1$. Это позволяет использовать в данном случае метод перевала. В итоге мы приходим к окончательному асимптотическому выражению для функции Грина в пределе больших расстояний:

$$G(\vec{r},t) \cong \frac{C}{(4\pi)^{3/2}} (Va^{h}t)^{-3/(1+h)} \varepsilon^{3(1-h)/2h} \exp(-h\varepsilon^{(1+h)/h}).$$
(2.33)

Здесь мы использовали следующие обозначения

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{|\eta_0|}}{1+h} \xi \equiv \frac{\sqrt{|\eta_0|}}{1+h} \frac{r}{\left(a^h V t\right)^{1/(1+h)}}$$
(2.34)

$$C = \frac{1}{\phi'(\eta_0)} \sqrt{\frac{2|\eta_0|}{h(1+h)}} \sim 1$$
(2.35)

Таким образом, из (2.33) следует, что в модели случайной адвекции хвосты концентрации при *h* < 1 имеют экспоненциальный вид.

Следует подчеркнуть, что значение перевальной точки p (определяемое из условия $\partial \Gamma(p; r, t) / \partial p = 0$) действительное и положительное, а пределы области интегрирования, дающего существенный вклад в (2.31), определяются неравенством

$$\frac{\left|\operatorname{Im} p\right|}{\left|p\right|} \lesssim \xi^{-(1+h)/2h} \ll 1, \tag{2.36}$$

Это обосновывает пренебрежение мнимой частью *p* при анализе аналитических свойств массового оператора.

3.
$$h = 1$$
.

Попытке рассмотреть предельный переход $h \to 1$ из диапазона h < 1 используя представление функции отклика (2.18) сталкивается с логарифмическими расходимостями в (2.8). Отсюда мы заключаем, что фактически классический скейлинг $\xi \sim r / \sqrt{Dt}$ с $D \sim Va$ должен модифицироваться слабой зависимостью от координат логарифмического типа:

$$\xi = r / \sqrt{D(r)t} \,. \tag{2.37}$$

Это означает, что при $r \leq R(t)$ и R(t) >> R(0) соотношение между плотностью потока $\vec{q}(\vec{r},t)$ и градиентом концентрации должно иметь вид

$$\vec{q}\left(\vec{r},t\right) = -D(r)\nabla\overline{c}\left(\vec{r},t\right)$$
(2.38)

где *г* отсчитывается от центра рассматриваемого начального распределения концентрации. Подставляя (2.37) в (2.18) и затем в (2.8), получаем:

$$\frac{dD(r)}{dr} \sim \frac{\left(Va\right)^2}{rD(r)} \tag{2.39}$$

откуда следует

$$D(r) = \tilde{D} \ln^{1/2} \left(\frac{r}{a}\right), \quad \tilde{D} \sim Va.$$
(2.40)

Подставляя это соотношение в (2.37), получаем оценку для размера облака примеси на больших временах:

$$R(t) \sim \sqrt{\tilde{D}t} \ln^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{\tilde{D}t}}{a} \right), \quad h = 1$$
(2.41)

Для вычисления дальней асимптотики концентрации, мы должны описать поведение массового оператора на положительной оси k при Im p = 0, p > 0. Для этого подставляем (2.37), (2.40) в (2.21), что дает

$$M(k,p) \cong -\tilde{D}k^2 \ln^{1/2} \mu, \quad \mu = \min\left\{ (ka)^{-1}, \sqrt{\frac{\tilde{D}}{a^2 p}} \right\}$$
 (2.42)

Далее, проводя ту же процедуру, что и для случая h < 1, мы находим, что ближайшими к вещественной оси k особыми точками в подынтегральном выражении (24) являются два полюса $k = \pm i\kappa_0$, где $\kappa_0 \simeq \sqrt{p/\tilde{D}} \ln^{-1/4} \left(\sqrt{\tilde{D}/a^2 p} \right)$. Это приводит к следующему асимптотическому G-функции при $\xi >> 1$:

$$G(\vec{r},t) \cong \frac{1}{\left\{4\pi \tilde{D}t \ln^{1/2} \left(\tilde{D}t / ar\right)\right\}^{3/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\tilde{D}t \ln^{1/2} \left(\tilde{D}t / ar\right)}\right\}.$$
 (2.43)

Таким образом, при h = 1 имеет место логарифмически модифицированный гауссов хвост.

2.1.4 Обсуждение

Таким образом, в рамках масштабного анализа построена модель переноса пассивного скаляра в статическом случайном поле адвекции при условии, что корреляторы скорости убывают по степенному закону. Показано, что в зависимости от скорости пространственного убывания коррелятора (характеризуемого степенью h) могут иметь место качественно различные режимы переноса. При достаточно быстром убывании (h > 1) перенос определяется короткими прыжками, так что имеет место режим классической диффузии. Для h < 1 адвективный перенос на больших расстояниях является скоррелированным, так что механизм типа прогулок Леви приводит к супердиффузионному режиму переноса. При h = 1 имеют место логарифмические поправки к классической диффузии.

Важный вывод, следующий из данного исследования, касается поведения примеси на асимптотически больших расстояниях (в «хвостах»). Показано, что

убывание концентрации при супердиффузионном режиме переноса описывается сжатой экспонентой и происходит быстрее, чем при классическом диффузионном законе. Этот вывод не подтверждает выводы моделей с дробной диффузией, где хвосты имеют степенной вид.

Остановимся кратко на вопросе, где могут встречаться среды с рассмотренным выше фрактальным распределением проницаемости. В работе [45] собраны результаты большого числа исследований, в которых анализировалось распределение трещин в скальных породах. В частности, измерялась фрактальная размерность сеток трещин, наблюдаемых на поверхности образцов. Из результатов работы следует, что наряду с достаточно часто встречающимся однородным распределением трещин (размерность равна 2), также достаточно часто встречаются распределения, в которых семейства трещин образуют кластеры, которые в определенных пространственных диапазонах обладают фрактальными размерностями. Как правило, встречаются кластеры с фрактальными размерностями вблизи следующих двух значений: 1,9 (реже) и 1,5 (чаще) (см. Рис. 16 b) работы [45]). Интересно отметить, что первое значение соответствует фрактальной размерности двумерного перколяционного кластера, в то время как во втором случае значение соответствует фрактальной размерности сечения трехмерного перколяционного кластера плоскостью (см. [44]).

В заключение, приведем сравнение выводов неклассической теории переноса примеси, базирующейся на модели случайной адвекции с некоторыми результатами Эксперимент полевых экспериментов. [48] проводился В трещиноватых кристаллических породах впрыскивание и откачка происходили в сходящейся слабодипольной конфигурации. В качестве трейсеров были выбраны тяжелая вода, бромиды, пентафторбензойная кислота, диффузионные свойства которых сильно различаются. Поведение концентрации на больших временах совпадает для всех трейсеров. Следовательно, диффузионный обмен частиц между слабопроницаемой матрицей и сильно-проницаемой средой не оказывает влияния на процессы переноса примеси.



Рис. 2.1 Экспериментальные данные [48]

Для интерпретации результатов данного эксперимента воспользуемся моделью случайной адвекции, развитой в настоящем разделе. Исходя из формы правого крыла кривой зависимости концентрации от времени при заданном расстоянии от источника (см. Рис. 2.1), находим показатель γ , который определяет режим переноса примеси, согласно соотношению для размера области локализации $R(t) \propto t^{\gamma}$.

Согласно модели случайной адвекции, зависимость концентрации во всем временном диапазоне можно интерполировать формулой:

$$\frac{C(t)}{C_0} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{3}{1+h}} \exp\left\{-B\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{1}{h}}\right\}$$
(2.44)

где $h = (1 - \gamma) / \gamma$ и *В* подгоночные параметры.

Сравнение теоретической кривой (5) и экспериментальных данных представлено на Рис. 2.2. Как видно из рисунка, теория довольно хорошо согласуется с экспериментом, при значениях $h \cong 0.4$, $\gamma \cong 0.7$. Отсюда заключаем, что перенос примеси в эксперименте [48] происходит в режиме супердиффузии, т.к. $\gamma > 1/2$.



Рис. 2.2. Теоретическая кривая и экспериментальные данные

Таким образом, анализ данного эксперимента демонстрирует, что классические модели переноса не дают адекватного описания поведения примеси в неоднородных трещиноватых средах. Это касается как временной зависимости размера области локализации примеси, так и «хвостов» пространственного распределения концентрации.

2.2 Случайная адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции

2.2.1 Постановка задачи

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда фрактальная среда имеет конечный радиус корреляции $\xi < \infty$. Основное уравнение описывающее концентрацию примеси, по-прежнему, имеет вид (2.1). Мы также будем рассматривать задачу с начальными условиями $c(\vec{r}, 0) = c_0(\vec{r})$ и будем полагать, что для поля скоростей выполняется условие несжимаемости (2.2).

При описании поля скоростей, в отличие от предыдущего случая, необходимо учесть, что теперь наряду с флуктуационной компонентой скорости необходимо рассматривать также и среднюю скорость:

$$\vec{v}\left(\vec{r}\right) = \vec{u} + \vec{V}\left(\vec{r}\right) \tag{2.45}$$

где

$$\left\langle \vec{v}\left(\vec{r}\right)\right\rangle = \vec{u}, \quad \left\langle \vec{V}\left(\vec{r}\right)\right\rangle = 0,$$
(2.46)

 \vec{u} есть средняя скорость, $\langle ... \rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций, или пространственное усреднение на масштабах больше корреляционной длины ξ .

Как и в предыдущем случае, парная корреляционная функция флуктуирующей части скорости убывает по степенному закону (2.6), но теперь это справедливо только в интервале фрактальности. Например, для парного коррелятора имеем

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}_{1},\vec{r}_{2}) = \left\langle V_{i}(\vec{r}_{1})V_{j}(\vec{r}_{2})\right\rangle \propto V^{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2h}, \quad a << r < \xi, \qquad (2.47)$$

где a и V^2 определены в разделе 2.1.1.

Вне интервала фрактальности, $r >> \xi$, корреляционные функции убывают экспоненциально.

С учетом этого Фурье образ двухточечного коррелятора принимает вид

$$K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{k}_{1},\vec{k}_{2},\xi\right\} = \left(2\pi\right)^{3}\delta\left(\vec{k}_{1}+\vec{k}_{2}\right)K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{k}_{1},\xi\right\},$$
(2.48)

$$K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{k},\xi\right\} \propto V^2 a^{2h} \begin{cases} k^{2h-3}, \ k >> \xi^{-1}; \\ \xi^{3-2h}, \ k << \xi^{-1}, \end{cases}$$
(2.49)

где $k = \left| \vec{k} \right|$.

Заметим, что отсюда следует однородность функции $K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{k},\xi\right\}$ как функции переменных \vec{k} и ξ^{-1} , то есть

$$K_{ij}^{(2)}\left\{\lambda \vec{k}, \xi/\lambda\right\} = \lambda^{2h-3} K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{k}, \xi\right\}.$$
(2.50)

Как и в предыдущем разделе, по аналогии с теорией критических явлений [39,40], мы будем называть параметр h масштабной размерностью скорости $\vec{V}(\vec{r})$. Аналогичные соотношения справедливы для любого n-точечного коррелятора скорости.

Согласно предыдущему разделу, аномальные режимы переноса (при условии $\xi \to \infty$) возникают только когда показатель экспоненты в (2.47) меньше двойки, то есть, когда h < 1. Ниже мы будем рассматривать только эту нетривиальную ситуацию.

Концентрация в произвольный момент времени выражается через свое начальное распределение с помощью соотношения (2.10) предыдущего раздела, где $G(\vec{r},\vec{r}';t)$ есть функция Грина, которая является решением уравнения

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i(\vec{r})\right\} G(\vec{r}, \vec{r}'; t) = 0$$
(2.51)

с начальным условием

$$G(\vec{r}, \vec{r}', 0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{2.52}$$

Как и ранее, мы интересуемся поведением концентрации, усредненной по ансамблю реализаций, $\overline{c}(\vec{r},t) \equiv \langle c(\vec{r},t) \rangle$. Она также выражается через начальные условия с помощью (2.10), в котором надо произвести замену *G* на \overline{G} , где $\overline{G}(\vec{r}-\vec{r}',t) \equiv \langle G(\vec{r},\vec{r}';t) \rangle$ есть усредненная по ансамблю реализаций функция Грина (ниже, для краткости, просто – функция Грина). Необходимо подчеркнуть, что усредненные по ансамблю реализаций функции \overline{c} и \overline{G} относятся ко всему пространству (а не только к отдельному фрактальному кластеру) и нормированы на трехмерный объем. Поэтому вся информация о фрактальных свойствах пространства содержится в свойствах поля скоростей (степенном поведении, параметрах *h* и *ξ*).

В данном разделе расчет $\overline{G}(\vec{r} - \vec{r}', t)$ проведен с помощью «крестовой» диаграммной техники, развитой в [49] и использованной в [1,50,51] для описания явлений переноса в неупорядоченных средах.

Принимая во внимание соотношения (2.45) и (2.52), перепишем (2.51) в представлении Лапласа

$$\left\{p+u_{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\right\}G\left(\vec{r},\vec{r}',p\right)=\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)+\hat{T}\left(\vec{r}\right)G\left(\vec{r},\vec{r}',p\right),$$
(2.53)

где

$$\hat{T}\left(\vec{r}\right) = -V_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$
(2.54)

Рассматривая $\hat{T}(\vec{r})$ как оператор возмущения, представим решение уравнения (2.53) в виде ряда теории возмущения:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', p) = G_0(\vec{r} - \vec{r}', p) + \int d^3 r_1 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, p) T(\vec{r}_1) G_0(\vec{r}_1 - \vec{r}', p) +$$

$$\iint d^3 r_1 d^3 r_2 G_0(\vec{r} - \vec{r}_1, p) \hat{T}(\vec{r}_1) G_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, p) \hat{T}(\vec{r}_2) G_0(\vec{r}_2 - \vec{r}', p) + \dots$$
(2.55)

где G_0 есть невозмущенная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\left\{p+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}G_0\left(\vec{r}-\vec{r}',p\right)=\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right).$$

Ряд теории возмущений (2.55) можно представить в следующем диаграммном виде

$$\overline{\vec{r} \quad \vec{r}'} = \overline{\vec{r} \quad \vec{r}'} + \frac{\mathbf{x}}{\vec{r} \quad \vec{r}'} + \frac{\mathbf{x}}{\vec{r} \quad \vec{r}'} + \frac{\mathbf{x}}{\vec{r} \quad \vec{r}'} + \frac{\mathbf{x}}{\vec{r} \quad \vec{r}'} + \dots$$
(2.56)

Здесь двойная линия соответствует функции $G(\vec{r}, \vec{r}', p)$, каждая одинарная тонкая линия соответствует $G_0(\vec{r}_n - \vec{r}_m, p)$, аргументы \vec{r}_n и \vec{r}_m соответствуют концам G -линий,

а кресты – оператору возмущению (2.54). Подразумевается интегрирование по всем внутренним переменным.

Проведем усреднение ряда (2.56) по ансамблю реализаций среды. Усреднению подлежат флуктуации скорости, входящие в операторы, обозначенные крестами уравнения (2.56). Как обычно среднее от произведения произвольного числа случайных сомножителей сводится к сумме произведений неприводимых средних (куммулянтов). Каждое слагаемое суммы связывается с определенным разбиением изначального произведения на группы сомножителей. Результат усреднения уравнения (2.56) принимает вид



Здесь толстые линии представляют собой усредненную функцию Грина \overline{G} и пунктирные линии связывают кресты, принадлежащие общему куммулянту. Далее, отберем все сильно связанные диаграммы (диаграммы, не могут быть разделены на две части разрезанием одной G_0 -линии). Означая сумму этих неприводимых диаграмм как

 \hat{M} , мы можем представить разложение (2.57) в виде

$$\overline{G} = G_0 + G_0 \hat{M} G_0 + G_0 \hat{M} G_0 \hat{M} G_0 + \dots$$

Данный ряд эквивалентен следующему операторному уравнению

$$\overline{G} = G_0 + G_0 \hat{M} \overline{G} ,$$

которое в аналитическом представлении имеет вид

$$\overline{G}(\vec{r}-\vec{r}',p) = G_0(\vec{r}-\vec{r}',p) + \int d^3r_1 d^3r_2 G_0(\vec{r}-\vec{r}_1,p) M(\vec{r}_1-\vec{r}_2,p) G_0(\vec{r}_1-\vec{r}',p)$$
(2.58)

Перегруппировка членов в диаграммном разложении \hat{M} позволяет представить данное разложение как сумму неприводимых скелетных диаграмм [51]



Здесь все толстые сплошные линии соответствуют \overline{G} -функциям.

В Фурье представлении уравнение (2.58) имеет вид

$$\bar{G}\left\{\vec{k}, p\right\} = \frac{1}{p + i\vec{k}\vec{u} - M\left\{\vec{k}, p\right\}}$$
(2.60)

В данном представлении уравнения (2.59) градиенты в операторе возмущения заменяются на волновые вектора, умноженные на мнимую единицу i, которые соответствуют аргументам соседних горизонтальных линий (неважно, которой из двух вследствие условия несжимаемости (2.3)). Каждая пунктирная линия, выходящая из креста, связана с его собственным волновым вектором, по которому производится интегрирование. Для каждой крестовой вершины (также как и для каждого «источника» пунктирных линий, связывающих кресты отдельного куммулянта) выполняется закон сохранения. Подставляя (2.60) в диаграммное разложение (2.59), получаем интегральное уравнение для $M \{\vec{k}, p\}$.

Данная техника изначально (см. [49], а также [49]) была развита для расчета функции Грина для электронов в примесных металлах. В теории примесных металлов [49, 51] использовалось существенное упрощение, связанное с малостью концентрации примеси и близостью импульса электронов к поверхности Ферми. Это позволяло ограничиться при вычислениях $M\{\vec{k}, p\}$ первой скелетной диаграммой в (2.59). Данное упрощение в нашем случае неприменимо, поскольку все диаграммы в (2.59) имеют один порядок величины. Однако, корреляционные функции, по которым производится диаграммное разложение, обладают свойством масштабной инвариантности (2.50). Поэтому естественно предположить (а потом и доказать), что и

сам массовый оператор также обладает этим свойством. В соответствии с этим предположением, масштабное преобразование для $M\left\{\vec{k}, p\right\}$ должно иметь вид

$$M\left\{\lambda^{-1}\vec{k},\lambda^{-\Delta}p,\lambda\xi\right\} = \lambda^{-\Delta}M\left\{\vec{k},p,\xi\right\}$$
(2.61)

Здесь мы также предположили равенство масштабных размерностей ∆ переменной Лапласа и массового оператора, что является следствием того, что они входят в уравнение (2.60) аддитивно.

Рассмотрим произвольное слагаемое разложения (2.59) содержащее, например, *n*-точечную корреляционную функцию. Показатель масштабной размерности данного члена есть сумма показателей элементов диаграммы. В эти элементы входят *n*точечная группа корреляторов скорости (масштабный индекс n(h-3)), *n* градиентов (*n*), (n-1) функций Грина ($(n-1)\Delta_G$), и 3*n*-мерный дифференциал волновых векторов (3*n*). (Поскольку волновые вектора \vec{q} , используемые как переменные интегрирования, входят в выражения аддитивно с \vec{k} , их масштабные индексы равны индексам \vec{k} .) Сумма перечисленных индексов равна масштабной размерности *M*, откуда получаем

$$\Delta = n + (n-1)\Delta_G + n(h-3) + 3n.$$
(2.62)

Принимая во внимание, что по определению, масштабная размерность Фурье-Лаплас образа функции Грина Δ_G и переменной Лапласа Δ связаны как

$$\Delta_G = -\Delta \,, \tag{2.63}$$

приходим к соотношению

$$\Delta = 1 + h \,, \tag{2.64}$$

независящему от порядка диаграммы. Поскольку уравнение (2.61) с $\Delta = 1 + h$ справедливо для каждого члена в (2.59), оно справедливо и для всего разложения в целом.

Из установленных соотношений мы можем выписать общий вид массового оператора:

$$M\left\{\vec{k},p\right\} = -pF\left(\eta,k\xi\right), \qquad \eta = k^2 \left(\frac{Va^h}{p}\right)^{2/(1+h)}, \tag{2.65}$$

где F есть безразмерная функция двух безразмерных переменных, и множитель Va^h получен с использованием соотношения (2.47).

Еще один вывод касается средней скорости \vec{u} . Как флуктуационная $\vec{V}(r)$, так и средняя \vec{u} компоненты скорости имеют одну и ту же физическую размерность, и поэтому должны иметь одну масштабную размерность. Отсюда следует

$$\Delta_u = \Delta_V = h \,. \tag{2.66}$$

Таким образом, поскольку средняя скорость может зависеть только от корреляциолнной длины, можно написать

$$u \sim V \left(\frac{a}{\xi}\right)^h. \tag{2.67}$$

Заметим, что в пределе $\xi \to \infty$ имеем u = 0.

2.2.2 Асимптотики массового оператора

Мы начнем с анализа выражения для первой диаграммы в уравнении (2.59):

$$M\left\{\vec{k}, p\right\} \approx -k_{i}k_{j}\int \frac{K_{ij}^{(2)}\left\{\vec{q}, \xi\right\}d^{3}q}{p + i\vec{k}\vec{u} - i\vec{q}\vec{u} - M\left\{\vec{k} - \vec{q}, p\right\}}.$$
(2.68)

В данном разделе мы полагаем, что переменная Лапласа p принимает действительные и положительные значения. Мы рассмотрим $M\{\vec{k}, p\}$ для произвольных комплексных значений p как аналитическое продолжение данной функции с вещественной полуоси во всю комплексную плоскость в следующем подразделе.

Возможны два предельных случая.

Первый соответствует неравенству:

$$\max\left\{k, \left(\frac{p}{Va^{h}}\right)^{\frac{1}{1+h}}\right\} \Longrightarrow \xi^{-1}.$$
(2.69)

В пределе $\xi \to \infty$, массовый оператор становится равным, полученному в предыдущих разделах. Из этих результатов следует, что значение интеграла (2.68) (при $\xi \to \infty$) в основном определяется значениями переменной интегрирования

$$q \ge k$$
 при $p \le Va^h k^{1+h}$ и $q \ge \left(p/Va^h \right)^{\frac{1}{1+h}}$ при $p \ge Va^h k^{1+h}$. (2.70)

Следовательно, в случае, когда корреляционная длина ξ удовлетворяет неравенству (2.69), для функции $K_{ij}^{(2)}\{\vec{q},\xi\}$ в подынтегральном выражении (2.68) следует использовать выражение в первой строчке (2.49), и слагаемыми $i\vec{q}\vec{u}$ и $i\vec{k}\vec{u}$ в знаменателе (2.68) можно пренебречь:

$$M\left\{\vec{k}-\vec{q},p\right\}\sim Va^{h}q^{1+h} >> qu, ku.$$

Это остается справедливым для всех диаграмм высших порядков диаграммного разложения (2.59). В результате, выражение для $M\left\{\vec{k}, p\right\}$ в пределе (2.69) принимает вид

$$M\left\{\vec{k},p\right\} = -pF\left(\eta,k\xi\right) \approx -pF\left(\eta,\infty\right) = -p\phi(\eta), \qquad (2.71)$$

где свойства функции $\phi(\eta)$ описаны в разделе 2.1.

В противоположном пределе,

$$\max\left\{k, \left(\frac{p}{Va^{h}}\right)^{\frac{1}{1+h}}\right\} << \xi^{-1},$$
(2.72)

главный вклад в интеграл (2.68) дают значения переменной интегрирования q порядка of ξ^{-1} . Поэтому в знаменателе (2.68) мы можем пренебречь как p, так и $i\vec{k}\vec{u}$, и положить $M\left\{\vec{k}-\vec{q},p\right\} \cong M\left\{-\vec{q},0\right\} \sim Va^h q^{1+h}$. В результате, интеграл не зависит от p и \vec{k} и оказывается порядка $u\xi$. То же справедливо и для интегралов более высоких порядков разложения (2.59). Соответственно выражение для массового оператора принимает вид

$$M\left\{\vec{k},p\right\} \approx -Dk^2, \qquad (2.73)$$

где, согласно выражению (2.67) эффективный коэффициент диффузии есть

$$D \sim u\xi \tag{2.74}$$

2.2.3 Поведение концентрации

Теперь приступим к анализу поведения концентрации на достаточно больших временах, когда размер облака примеси существенно превосходит первоначальную величину. В этом случае функция Грина непосредственно описывает поведение концентрации. Функция $\overline{G}(\vec{r},t)$ определяется обратным Фурье-Лаплас преобразованием функции (2.60):

$$\overline{G}(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\left(i\vec{k}\vec{r}+pt\right)}{p+i\vec{k}\vec{u}-M\left(\vec{k},p\right)}, \quad \operatorname{Re}b > 0.$$
(2.75)

Анализ показывает, что поведение системы принципиально различается на двух временных интервалах, граница между которыми определяется выражением

$$t_* = \frac{\xi}{u} \approx \frac{\xi^{1+h}}{Va^h}.$$
(2.76)

В интервале *t* << *t*_{*} для основного облака примеси значения переменной Лапласа дающих основной вклад в интеграл (2.75)определяются условием $p \sim t^{-1} >> t_*^{-1} \approx Va^h \xi^{-(1+h)}$. Таким образом, выполняется неравенство (2.69), и массовый оператор определяется выражением (2.71). В этом случае характерные значения переменной k в (2.75) порядка $k \sim \left(p/Va^h \right)^{\frac{1}{(1+h)}}$. Отсюда вытекает неравенство $ku \ll p, M$ и, следовательно, мы можем пренебречь слагаемым $i\vec{k}\vec{u}$ в знаменателе (2.75). Это тем более справедливо в области хвостов, где справедливо $p >> t^{-1}$. Таким образом, в интервале $t \ll t_*$, мы приходим к супердиффузионному режиму, исследованному в разделе 2.1. В этом режиме размер облака примеси R(t) растет со временем как (2.25):

$$R(t)=\left(Va^{h}t\right)^{\frac{1}{1+h}},$$

а на больших расстояниях функция Грина убывает согласно

$$\overline{G}(\vec{r},t) \cong \frac{B}{(4\pi)^{3/2} R(t)^3} \zeta^{\frac{3(1-h)}{1+h}} \exp\left\{-C\zeta^{\frac{1+h}{h}}\right\}, \qquad \zeta = \frac{r}{R(t)}, \qquad (2.77)$$

где R(t) определяется выражением (2.25), а константы $B, C \sim 1$ вычислены в разделе 2.1.

На больших временах, $t >> t_*$, в основном облаке примеси имеем оценку $p \sim t^{-1} \ll t_*^{-1}$. Отсюда следует справедливость неравенства $p \ll Va^h \xi^{-(1+h)}$ соответствующего условию (2.72). Таким образом, массовый оператор принимает форму (2.73) и интеграл в (2.75) приводит к классическому диффузионному выражению

$$\overline{G}(\vec{r},t) \approx \left(4\pi Dt\right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\left(\vec{r}-\vec{u}t\right)^2}{4Dt}\right).$$
(2.78)

Теперь рассмотрим далекую область хвостов концентрации. Как следует из вычислений, характерные значения волнового вектора, определяющие интеграл в (2.75) определяются условием

$$k \sim \max\left\{\frac{1}{\sqrt{Dt}}, \frac{r}{2Dt}\right\},\tag{2.79}$$

и для расстояний

$$r \gg ut \,, \tag{2.80}$$

условие (2.72) нарушается. Поэтому, на расстояниях (2.80) вычисления должны проводиться с использованием массового оператора, определенного выражением (2.71). Это приводит к возникновению на расстояниях r >> ut супердиффузионного фрагмента хвоста. Таким образом при $t >> t_*$ хвост имеет двухступенчатую форму: ближняя к основному облаку часть определяется классической диффузией (2.78), а более удаленная часть определяется супердиффузионным выражением (2.77). Сравнивая (2.77) и (2.78), нетрудно видеть, что супердиффузионная часть хвоста убывает быстрее, чем часть, определяемая классической диффузией.

Переход от одной ступени хвоста к другой происходит при $r_* \sim ut$. Характерные значения концентрации в этой области есть

$$c(r_*,t) \propto \exp\left(-A\frac{t}{t_*}\right),$$
 (2.81)

где *A* ~ 1.

Заметим, что время t_* (формула (2.76)) перехода от супердиффузионного режима к классической диффузии может быть интерпретировано двумя различными способами. С одной стороны, на временах $t \sim t_* = \frac{\xi^{1+h}}{Va^h}$ размер облака примеси становится порядка корреляционной длины, $R(t_*) \sim \xi$. Таким образом, при $t > t_*$ среда может рассматриваться как статистически однородная, так что дисперсия примеси происходит по классическому диффузионному закону (2.78). С другой стороны, из оценки $R(t_*) \sim \xi$ следует соотношение

$$\frac{R(t_*)}{u} \sim \frac{\xi}{u} \sim \frac{\xi^{1+h}}{Va^h} \sim \frac{\xi^2}{D},$$
(2.82)

которое означает, что размер облака примеси, определяемый супердиффузионным, либо классическим диффузионным режимом, при $t \sim t_*$ становится порядка среднего смещения частиц, определяемым скоростью u.

Для объяснения формы концентрационного хвоста можно предложить следующую качественную интерпретацию. На ранних временах, $t < t_*$, перенос примеси происходит со скоростью $v(r) \sim V \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^h$. На поздних временах, $t > t_*$, большая часть примеси движется со скоростями $v \sim v(\xi)$, хаотично направленными на расстояниях $r > \xi$. Это, как обычно, приводит к классической диффузии. Можно сказать, что «столкновения» элементов жидкости разрушает корреляции при $r > \xi$. Однако часть частиц примеси сохраняет свое скоррелированное движение (без «столкновений»). Эти частицы проникают на расстояния много больше, чем частицы в основном облаке. Их количество мало и они формируют супердиффузионный хвост на больших расстояниях при больших временах. Таким образом, область супердиффузионного хвоста при $t > t_*$ определяется условием $r > v(\xi)t$. В этой области классическая диффузия с длиной прыжка ξ и скоростью $v(\xi)$ невозможна.

2.2.4 Краткое обсуждение

В данном подразделе исследовано влияние конечного радиуса корреляции на перенос примеси в поле случайной адвекции во фрактальной среде. Найдено характерное время, *t*_{*}, разделяющее временные интервалы с разными режимами

переноса. На малых временах, *t* << *t*_{*}, перенос происходит в режиме супердиффузии, подробно описанном в разделе 2.1. На более поздних временах, *t* >> *t*_{*}, когда размер облака примеси становится больше корреляционной длины, режимом переноса становится классическая диффузия (адвекция диффузия).

Данный результат (переход к режиму классической диффузии) находится в согласии с результатами [53], где миграция примеси во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции исследовалась численно для диффузии примеси на фрактале. В этом случае, на временах, когда размер облака примеси (или, что то же, средняя дисперсия частиц примеси) превышала корреляционную длину, субдиффузионный режим переноса примеси сменялся классическим диффузионным режимом.

Нами показано, что эффективный коэффициент диффузии на больших временах определяется произведением средней (дрейфовой) скорости и корреляционной длины.

На больших временах хвост концентрации состоит из двух ступеней. Наиболее близкая часть хвоста описывается зависимостью, определяемой классической диффузией, а более удаленная часть – супердиффузионной зависимостью. Данный расчет еще раз подтверждает общий вывод о том, что при смене режима переноса в основном облаке, хвост концентрации становится многоступенчатым, причем более удаленные части хвоста соответствуют более ранним режимам переноса.

Заметим, что соотношение между показателем степени $\frac{1}{1+h}$ в выражении (2.25) и степенью $\frac{1+h}{h}$ безразмерной переменной ζ в (2.77) согласуется с соотношением между фрактальной размерностью случайных блужданий d_w^{-1} и показателем $u = \frac{d_w}{d_w - 1}$ соответствующей переменной для субдиффузии на фрактале, предложенном, например, в [54, 55] на основе скейлинговых соотношений для субдиффузии примеси на фракталах. Эти соотношения предсказывают, что при супердиффузионном режиме концентрация на больших расстояниях убывает быстрее, чем согласно гауссовой закономерности, в то время как для субдиффузионного режима ситуация обратная.

2.3 Динамические флуктуации поля скоростей инфильтрации

До сих пор мы рассматривали модель случайной адвекции примеси в предположении, что поле скоростей переноса не зависит от времени. Тем не менее, возможны случаи, когда это не так. Примером является перенос в ненасыщенных средах. Здесь, наряду с силами гравитации и вязкости, существенную роль играют силы капиллярного давления. Движение жидкости можно представить как каскад переходов между метастабильными состояниями, формирование которых обусловлено действием капиллярных сил. Это означает, что поле скоростей адвекции флуктуирует не только в пространстве, но и во времени. Проанализируем возможные последствия этих флуктуаций

2.3.1 Корреляционная функция скорости при учете динамических флуктуаций

Прежде чем рассматривать вопрос, как динамические флуктуации влияют на перенос примеси, выясним, каким образом данные флуктуации проявляют себя при описании характеристик поля скоростей. Рассмотрим это на примере инфильтрации жидкости в ненасыщенных геологических средах.

Хорошо известно, что при уменьшении насыщения в пористой среде всегда остается некоторое количество влаги, которое локализуется в случайно расположенных в пространстве областях и удерживается там капиллярными силами. Когда имеется дополнительный приток жидкости с границы, капли начинают расти, и при достижении некоторого критического размера становятся неустойчивыми и под действием силы тяжести начинают движение вниз. В процессе движения они разбиваются на более мелкие капли, которые, в свою очередь, взаимодействуют с нижележащими каплями, и процесс повторяется. Данная динамическая система относится К классу рассредоточенных (extended) диссипативных динамических систем. Наличие большого числа метастабильных состояний (различных конфигураций «висящих» капель) приводит к тому, что после возмущения, система переходит из одного метастабильного состояния в другое. Совокупность таких метастабильных состояний образует, так называемое, состояние СамоОрганизованной Критичности (СОК) [56]. В настоящее время не существует исчерпывающего описания СОК состояний, однако можно выделить три основных свойства, важных для дальнейшего [56-58].

- Метастабильные структуры обладают свойством пространственного самоподобия, что означает, что набор траекторий капель может рассматриваться как перколяционный кластер. Поэтому для описания усредненного во времени движения можно использовать результаты классической перколяционной теории.
- 2. Корреляции флуктуаций в широком временном диапазоне характеризуются спектром $\sim \frac{1}{f^{\alpha}}$ с $\alpha \sim 1.3$ то означает, что наряду с пространственным самоподобием имеет место временное самоподобие, которое должно быть принято во внимание при описании скейлинговых соотношений. Таким образом, время в данном случае имеет собственную масштабную размерность.
- Критичность возникает в результате подстраивания одного или более управляющего параметра (например, в данном случае это внешний поток жидкости). Система, обладающая свойствами СОК, приходит к конечному состоянию независимо от начальных условий.

Ниже мы будем считать, что необходимые условия, для того чтобы система находилась в состоянии СОК выполнены, так что свойства течения жидкости и перенос примеси определяются положениями 1 и 2. В предыдущих разделах данной главы были обсуждены следствия, к которым приводит п. 1. Перейдем к обсуждению п. 2.

Вследствие того, что поле скоростей теперь испытывает также и флуктуации во времени, парный коррелятор скорости зависит не только от пространственных координат, но также и от скорости:

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r},t) = \left\langle v_i'(\vec{r}_1,t_1)v_j'(\vec{r}_2,t_2) \right\rangle; \ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, 1 \quad t = t_1 - t_2.$$
(2.83)

Учитывая свойство самоподобия, которым обладает система в области фрактальности $a < r < \xi$, функция $K_{ii}^{(2)}(\vec{r},t)$ теперь обладает свойством

$$K_{ij}^{(2)}\left(\lambda\vec{r},\lambda^{\Delta_{i}}t\right) = \lambda^{-2h}K_{ij}^{(2)}\left(\vec{r},t\right),$$
(2.84)

где вводится новый индекс, соответствующий масштабной размерности времени Δ_t , характеризующий динамические свойства системы [47].

Рассмотрим пространственно-временной Фурье образ парной корреляционной функции

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{k}\,\omega) = \int d^3r \, dt \ K_{ij}^{(2)}(\vec{r},t) \exp\left[-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)\right].$$
(2.85)

Наиболее общий вид данной функции есть

$$K_{ij}^{(2)}\left(\vec{k}\,\omega\right) = K_{ij}^{(2)}\left(\vec{k}\right) \left[\delta\left(\omega\right) + \frac{1}{\omega}F\left(\vec{k}\,\omega\right)\right],\tag{2.86}$$

где $K_{ij}^{(2)}(\vec{k})$, по-прежнему, определяется первой строчкой (2.49), а для $F(k,\omega)$ справедливо

$$F(k,\omega) = f\left[\frac{\omega(\omega t_1)^{z^{-1}}}{Va^h k^{1+h}}\right], \quad z = \frac{1+h}{\Delta_t}, \quad t_1 = \frac{a}{V}$$
(2.87)

Данное соотношение отражает тот факт, что вследствие масштабного соотношения (2.84) и определений (2.85) и (2.49), функция $K_{ij}^{(2)}(\vec{k}\omega)$ должна быть произведением $K_{ij}^{(2)}(\vec{k})$ и функции, имеющей размерность обратной частоты. Наиболее общий вид такой функции записан в квадратных скобках (2.86), где слагаемое с дельтафункцией есть результат преобразования Лапласа стационарной части корреляционной функции. Данное слагаемое соответствует конечному (ненулевому) значению функции $K_{ij}^{(2)}(\vec{r},t)$ при $t \to \infty$. Второе слагаемое в правой части (2.86) описывает динамические флуктуации. Структура самоподобной переменной, являющейся аргументом f, следует единственно из инвариантности корреляционной функции при масштабных преобразованиях в области фрактальности.

2.3.2 Влияние динамических флуктуаций на режим переноса

В основу рассмотрения положим уравнение переноса (2.1), в котором теперь скорость \vec{v} , в отличие от стационарной теории стохастической адвекции, является функцией не только координат, но и времени, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$. Скорость \vec{v} является случайной величиной и характеризуется своими корреляционными функциями. Свойства простейшей из них – парной корреляционной функции были проанализированы в предыдущем разделе. Как и везде в диссертации, будем считать, что скорость удовлетворяет условию несжимаемости.

Уравнению (2.1) сопоставим запаздывающую функцию Грина, которая определяется неоднородным уравнением

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + v_i(\vec{r},t)\frac{\partial}{\partial r_i}\right\}g\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right) = \delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)\delta\left(t-t'\right)$$
(2.88)

и удовлетворяет условию причинности

$$g\left(\vec{r},\vec{r}';t,t'\right)\Big|_{t< t'} = 0.$$
(2.89)

Распределение концентрации примеси в момент времени t, $c(\vec{r},t)$, выражается через это распределение в начальный момент времени t = 0 соотношением

$$c(\vec{r},t) = \int d^{3}r \ g(\vec{r},\vec{r}';t,0)c(\vec{r},0)$$
(2.90)

Как и ранее, будем интересоваться распределением концентрации, усредненным по ансамблю реализаций среды $\overline{c}(\vec{r},t) \equiv \langle c(\vec{r},t) \rangle$. Выражение для него получается из (2.90) заменой $c \to \overline{c}$, $g \to G$, где $G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \equiv \langle g(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \rangle$ – усредненная по ансамблю функция Грина (далее для краткости будем называть ее просто функцией Грина). Как и в разделе 2.2 для стационарного случая, вычисление функции $G(\vec{r},t)$ будем производить методами квантовой теории поля на основе "крестовой" диаграммной техники, разработанной в [49] и нашедшей дальнейшее применение в теории переноса по неупорядоченным средам [1, 50, 51]. Ранее мы пользовались представлением Фурье по пространственным координатам и Лапласа – по времени. Теперь, связи с тем, что оператор $\vec{v}(\vec{r},t)\nabla$, который описывает взаимодействие со средой и является одним из основных элементов диаграмм, зависит от времени, вычисления удобней проводить в представлении Фурье - как по пространственным координатам, так и по времени:

$$G_{\vec{k}\omega} = \int d^3r \, dt \; G(\vec{r}, t) \exp\left[-i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right] \tag{2.91}$$

Из условия причинности (2.89) следует, что величина $G_{\vec{k}\omega}$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной частоты ω .

Подобно стационарной теории, вводим массовый оператор $M_{\vec{k}\omega}$ посредством соотношения

$$G_{\bar{k}\omega} = \frac{1}{-i\omega + M_{\bar{k}\omega}}$$
(2.92)
Как и функция Грина, массовый оператор является аналитической функцией частоты в верхней половине комплексной плоскости.

Отметим, что вследствие условия (2.89) соответствие между представлением Фурье и представлением Лапласа по времени для функции Грина $G\{\vec{k}, p\}$

$$G\left\{\vec{k},p\right\} = \int d^3r \int_{0}^{\infty} dt \ G\left(\vec{r},t\right) \exp\left(-i\vec{k}\vec{r}-pt\right).$$

как и для массового оператора $M\left\{\vec{k}, p\right\}$, имеет вид:

$$\omega \leftrightarrow ip$$
. (2.93)

Поэтому имеем соотношения:

$$G\left\{\vec{k}, ip\right\} = G_{\vec{k}\omega}, \qquad M\left\{\vec{k}, ip\right\} = M_{\vec{k}\omega}.$$
(2.94)

Величина $M_{\bar{k}\omega}$ описывается последовательностью неприводимых скелетных диаграмм, которая формально совпадает с той, что имела место в стационарной теории стохастической адвекции (2.59).

Как и там, прямые горизонтальные отрезки линий на графиках в равенстве (2.59) отвечают функциям Грина. Как и в стационарной теории, каждый крест дает множитель $ik_i^{(m)}$, либо $ik_i^{(n)}$, где $\vec{k}^{(m)}$ и $\vec{k}^{(n)}$ - волновые вектора *G* - линий, соединенных с крестом, соответственно, справа и слева. Оба варианта эквивалентны в силу условия (2.3). Как и в стационарной теории, индивидуальная пунктирная линия на графиках отвечает парной корреляционной функции скоростей, а пунктиры, объединенные кольцом, отвечают неприводимым *n*-точечным корреляторам (кумулянтам с n > 2). Отличие от стационарной теории состоит в том, что теперь пунктирные линии являются носителями не только волнового вектора, но и частоты. Соответственно, каждый прямой отрезок (функция Грина) отличается не только своим волновым вектором, но и частотой. По частотам пунктирных линий теперь, как и по волновым векторам, проводится интегрирование. В качестве примера, на скелетной диаграмме второго порядка для поляризационного оператора (2.59) указаны волновые вектора и частоты составляющих диаграмму линий.



Для того чтобы получить представление о роли динамических эффектов в процессах переноса примеси за счет стохастической адвекции, оценим выражение для вклада в поляризационный оператор –

$$M^{(2d)}_{\vec{k}\omega}$$
,

получающегося из диаграммы (2.95), если в ней для функции Грина (прямого отрезка) воспользоваться результатом стационарной теории

$$G_{\vec{k}\omega}^{(s)} = \left(-i\omega + M_{\vec{k}\omega}^s\right)^{-1},\tag{2.96}$$

а для пунктирной линии подставить динамическую часть корреляционной функции (отвечающую второму слагаемому в скобках справа в формуле (2.86))

$$K_{ij}^{(d)}\left(\vec{k},\omega\right) \propto \frac{1}{\omega} k^{2h-3} f\left(\frac{\omega^{z}}{k^{1+h}}\right).$$
(2.97)

Как показано в предыдущих разделах, для поляризационного оператора имеем

$$M^{s}_{\vec{k}\omega} = p\phi(\eta), \quad \eta = k^{2} \left(-i\omega\right)^{-\frac{2}{1+h}}.$$
(2.98)

Здесь и до конца подраздела в качестве единиц измерения волнового вектора и частоты приняты, соответственно, 1/*a* и *V*/*a*.

Подставляя соотношения (2.96)-(2.98) в (2.95) и вводя переменную

$$u = \frac{\omega'}{k'^{(1+h)/z}} \tag{2.99}$$

для величины $M^{(2d)}(ec{k},\omega)$ получаем оценку

$$M_{\vec{k}\omega}^{(2d)} \sim k^{2} \int d^{3}k' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u} f\left(u^{z}\right) \frac{k'^{2h-3}}{-i\left(\omega - uk'^{(1+h)/z}\right) + \left|\vec{k} - \vec{k'}\right|^{1+h}} \phi\left(\frac{\left|\vec{k} - \vec{k'}\right|^{1+h}}{-i\left(\omega - uk'^{(1+h)/z}\right)}\right)$$
(2.100)

Пусть z = 1. Тогда преобразованием $\vec{k} \to \lambda \vec{k}$, $\omega \to \lambda^{1+h}\omega$ с одновременным переходом к новой переменной интегрирования $\vec{k}' = \vec{k} / \lambda$, вместо переменной \vec{k} , убеждаемся из (2.100), что функция $M_{\vec{k}\omega}^{(2d)}$ удовлетворяет соотношению

$$M_{\lambda\bar{k}\,\lambda^{1+h}\omega}^{(2d)} = \lambda^{1+h} M_{\bar{k}\omega}^{(2d)}$$
(2.101)

Это означает, что $M_{\bar{k}\omega}^{(2d)}/k^{1+h}$ является функцией автомодельной переменной $\eta = k^2 (-i\omega)^{-\frac{2}{1+h}}$, и, следовательно, величина $M_{\bar{k}\omega}^{(2d)}$ имеет такую же структуру, как и поляризационный оператор в стационарной теории стохастической адвекции (2.98). Данное свойство, как нетрудно убедиться, сохраняется для всей бесконечной последовательности диаграмм для поляризационного порядка с учетом обеих составляющих корреляционных функций – статической и динамической. Отсюда следует, что при условии z = 1 динамические флуктуации не приводят к изменению структуры поляризационного оператора. Поэтому общие закономерности переноса примеси, установленные в стационарной теории, остаются в силе и в динамической теории.

Рассмотрим теперь свойства величины $M_{k\omega}^{(2d)}$, определяемой равенством (2.100), при значениях z < 1. Учитывая то, что характерные значения переменной u под интегралом в (2.100) соответствуют $u \sim 1$, а также то, что основной вклад в интеграл по переменной k' дает область значений

$$k' \sim \max\left\{k, \omega^{1/1+h}\right\},\,$$

видим, что слагаемые $uk'^{(1+h)/z}$ в знаменателе подынтегрального выражения (2.100) приводят к малым поправкам. Пренебрегая ими, мы приходим к выводу, что в отношении зависимости от аргументов \vec{k}, ω величина $M_{\vec{k}\omega}^{(2d)}$ при $z \le 1$ имеет структуру (2.98). Этот вывод сохраняется и по отношению к графику любого порядка, принадлежащему последовательности диаграмм для поляризационного оператора. Таким образом, независимо от значения индекса $z \le 1$ мы заключаем, что динамические флуктуации сами по себе не приводят к изменению закономерностей переноса примеси в модели стохастической адвекции. Это означает, что результаты, полученные в стационарной теории стохастической адвекции на этапе построения теории до учета стоков в слабопроницаемую компоненту среды, остаются в силе и при наличии динамических флуктуаций.

Подчеркнем, однако, что данный вывод был получен в рамках модели случайной адвекции без учета возможного влияния на перенос ловушек (второй пористости, которая будет рассмотрена ниже в главах 4 и 5).

ГЛАВА З

СЛУЧАЙНАЯ АДВЕКЦИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕДАХ

Описанная в предыдущей главе модель случайной адвекции примеси с медленно убывающими корреляциями флуктуаций скорости позволяет при своей наглядной физической постановке учесть принципиальные особенности переноса в изотропных фрактальных средах. Основным результатом модели явилось то, что при достаточно медленном пространственном убывании коррелятора флуктуаций скорости (показатель убывания парного коррелятора скорости с расстоянием, 2h, должен быть меньше двойки) перенос примеси происходит в режиме супердиффузии. Именно, размер облака примеси R растет со временем как t^{γ} с $1/2 < \gamma < 1$, причем γ и h связаны соотношением: $\gamma = (1+h)^{-1}$. Также было показано, что на достаточно больших временах, когда размер облака примеси превосходит корреляционный радиус среды ξ , режимом переноса становится классическая диффузия, параметры которой определяются величиной ξ . Учет возможных динамических флуктуаций поля скоростей не приводит к появлению новых режимов переноса.

Все предыдущие исследования проводились в предположении, что поле флуктуирующей компоненты скорости адвекции является изотропным. Однако наличие выделенного направления, определяемого, например, вектором силы тяжести, с необходимостью приводит к тому, что статистические свойства флуктуирующих параметров приобретают анизотропный характер. Определение свойств анизотропных течений во фрактальных средах относится к классу задач направленной перколяции, исследованию которой посвящен ряд работ [59-61]. Из результатов этих работ, в частности, следует, что при наличии анизотропии сохраняется степенной характер убывания корреляционных функций, являющийся, в конечном итоге, следствием самоподобия фрактальных сред. В настоящей главе нами проведено исследование процесса переноса примеси в поле случайной адвекции при наличии сильной анизотропии, в предположении, что корреляционные функции скорости убывают степенным образом.

План главы следующий. В первом разделе описана постановка задачи, сформулированы основные представления о свойствах среды переноса. Во втором

77

разделе выведены основные уравнения модели и проведен масштабный анализ входящих в уравнения величин. В третьем разделе описано поведение концентрации примеси в основном облаке и на асимптотически больших расстояниях при условии, что размер облака примеси существенно меньше корреляционного радиуса среды. Рассмотрены два случая: 1) когда перенос примеси происходит в режиме супердиффузии во всех направлениях, и 2) когда в одном из направлений условия супердиффузионности переноса нарушаются. В четвертом разделе рассмотрен режим переноса на больших временах, когда размер основного облака среды становится больше корреляционного радиуса среды. В заключительном разделе приведены основные выводы этого раздела.

3.1 Постановка задачи

Базовым уравнением, описывающим перенос примеси, является уравнение (2.1) предыдущей главы для микроскопической концентрации частиц $c(\vec{r},t)$, где теперь $\vec{v}(\vec{r})$ является случайной анизотропной функцией координат. Мы, по-прежнему, рассматриваем несжимаемую жидкость, так что поле скоростей удовлетворяет уравнению (2.3): $div \vec{v} = 0$.

Далее мы будем строить модель для величин, усредненных по ансамблю реализаций среды. Такое усреднение приводит, ввиду однородности пространства, к тому, что характеризующие среду величины, зависевшие до усреднения от одной пространственной переменной, теперь будут константами. Величины, ранее зависевшие от двух и более координат, теперь будут функциями только разностей этих координат. Процедуру усреднения мы будем обозначать скобками $\langle ... \rangle$.

Поскольку мы рассматриваем среды с конечным радиусом корреляции, скорость адвекции имеет среднюю и флуктуационную части, определяемые согласно (2.44) и (2.45) предыдущей главы.

Основным свойством рассматривавшейся ранее изотропной случайнонеоднородной фрактальной среды являлось то, что в достаточно большой пространственной области (ее границы будут определены позже) отсутствует какойлибо пространственный масштаб, который определял бы поведение системы. Другими словами, среда являлась самоподобной. Этот факт позволил нам воспользоваться

78

идеями теории критических явлений [46, 47], и рассматривать среду и вместе с ней процессы переноса, обладающими свойством масштабной инвариантности. Напомним, что в соответствии с этим положением, при изменении пространственного масштаба в λ раз и одновременном изменении всех физических величин A (зависящих от координат) в λ^{Δ_A} раз, уравнения, описывающие поведение системы, остаются неизменными. Величина Δ_A называется масштабной размерностью величины A. Отсюда, в частности, следовало, что корреляторы флуктуирующей компоненты скорости должны с расстоянием убывать степенным образом, так что n-точечный коррелятор, определяемый соотношением $K_{i_l i_2 \dots i_n}^{(n)} (\vec{r_1}, \vec{r_2}, \dots, \vec{r_n}) = \langle V_{i_1} (\vec{r_1}) V_{i_2} (\vec{r_2}) \dots V_{i_n} (\vec{r_n}) \rangle$, в изотропном случае должен был быть однородной функцией координат порядка -nh для любых пар точек $\vec{r_i}, \vec{r_j}$ в пространственном диапазоне фрактальности. Здесь h > 0, а скобки означают усреднение по ансамблю реализаций.

В случае анизотропной фрактальной среды последняя уже не обладает свойством самоподобия. Вместо этого она является самоафинной [52]. В соответствии с этим, уравнения сохраняют свой вид, если при масштабных преобразованиях каждой координате будет приписана своя собственная масштабная размерность. Рассмотрим, к чему приводит данное утверждение.

Основной величиной, определяющей процесс адвекции примеси, является корреляционная функция флуктуирующей компоненты скорости. Будем исследовать задачу в декартовых координатах (x, y, z), полагая ось Oz направленной вертикально вниз вдоль вектора силы тяжести. Введем обозначения $\vec{r} = \{\vec{\rho}, z\}$, где $\vec{\rho} = (x, y)$ двумерный вектор.

Тогда, при масштабном преобразовании

$$\{\vec{\rho}, z\} \to \{\lambda^{1/\beta} \vec{\rho}, \lambda z\}$$
(3.1)

парный коррелятор для *z* - компоненты флуктуирующей скорости в интервале фрактальности удовлетворяет соотношению

$$K_{zz}^{(2)}(\vec{r}) \to \lambda^{-2h} K_{zz}^{(2)}(\vec{r}).$$
 (3.2)

Аналогичные соотношения с заменой λ^{-2h} на λ^{-nh} справедливы для z компонент n-точечных корреляционных функций.

В соответствии с (3.1), (3.2), h и β есть индексы, характеризующие случайное поле скоростей. Как показано в предыдущей главе, при значениях h > 1 перенос определяется короткими некоррелированными прыжками, так что вместо масштабной инвариантности имеет место статистически однородный случай. В итоге перенос определяется классическим диффузионным режимом. Поэтому, в данной главе мы будем рассматривать нетривиальный случай h < 1. Условия на возможные значения β мы проанализируем ниже.

В соответствии с введенным выше определением масштабной размерности, из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что масштабными размерностями координат и коррелятора скорости являются

$$\Delta_z = 1, \quad \Delta_\rho = \frac{1}{\beta}, \tag{3.3}$$

$$\Delta_{K_{yy}} = -2h. \tag{3.4}$$

Для того, чтобы коррелятор как функция координат обладал нужной масштабной размерностью, он должен выражаться через определенную степень этих координат и безразмерную функцию от автомодельных безразмерных переменных. Учитывая также физическую размерность входящих величин, выражение для $K_{zz}^{(2)}(\vec{r})$ можно представить в виде:

$$K_{zz}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{2h} \varphi\left(\frac{\rho^{\beta}a_{\parallel}}{z\,a_{\perp}^{\beta}}\right),\tag{3.5}$$

где $\rho = |\vec{\rho}|$, и $\varphi(x)$ безразмерная функция автомодельной переменной.

Выражение (3.5) справедливо в интервале фрактальности

$$a_{\parallel} \ll z \ll b_{\parallel}, \quad a_{\perp} \ll \rho \ll b_{\perp}, \tag{3.6}$$

где a_{\parallel} и b_{\parallel} , и a_{\perp} и b_{\perp} - соответственно, нижние и верхние границы интервала фрактальности в продольном и поперечном направлениях. Верхняя граница интервала фрактальности может определяться либо размерами области, которую занимает среда в данном направлении L_{α} , либо корреляционной длиной ξ_{α} , где $\alpha = ||, \perp$, понятие которой мы рассмотрим чуть позже.

Функция $\varphi(x)$ описывается следующими асимптотическими выражениями

$$\varphi(x \to 0) \to const,$$

$$\varphi(x \to \infty) \sim x^{-2h}.$$
(3.7)

которые обеспечивают конечность и отличие от нуля коррелятора вдоль оси O_Z и в плоскости вектора $\vec{\rho}$. В соответствии с выражениями (3.7) асимптотики для $K_{zz}^{(2)}$ имеют вид:

$$K_{zz}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{2h}, \quad \frac{z}{a_{\parallel}} \gg \left(\frac{\rho}{a_{\perp}}\right)^{\beta},$$

$$K_{zz}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a_{\perp}}{\rho}\right)^{2h\beta}, \quad \frac{z}{a_{\parallel}} \ll \left(\frac{\rho}{a_{\perp}}\right)^{\beta}.$$
(3.8)

Другие компоненты парного коррелятора также строятся исходя из масштабной размерности входящих в соотношения величин, причем размерность этих компонент устанавливаются исходя из условия несжимаемости (2.3). Для коррелятора поперечной компоненты скорости получаем:

$$\Delta_{K_{\rho\rho}} = -2h - 2 + \frac{2}{\beta}.$$
(3.9)

Соответственно, для асимптотик коррелятора $K^{(2)}_{\rho\rho}$ имеем

$$K_{\rho\rho}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{2h-2+\frac{2}{\beta}}, \quad \frac{z}{a_{\parallel}} \gg \left(\frac{\rho}{a_{\perp}}\right)^{\beta},$$

$$K_{\rho\rho}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a_{\perp}}{\rho}\right)^{2h\beta-2\beta+2}, \quad \frac{z}{a_{\parallel}} \ll \left(\frac{\rho}{a_{\perp}}\right)^{\beta}.$$
(3.10)

Поскольку естественным физическим условием является убывание корреляторов с увеличением расстояния, из (3.10) следует условие на допустимые значения β :

$$\beta > \frac{1}{1+h} \tag{3.11}$$

В изотропной среде величина *ξ*, определяет верхнюю границу размера области, в которой среда обладает свойством самоподобия. Если в среде имеется величина, имеющая среднюю и флуктуирующие компоненты, то *ξ* определяет масштаб, на котором парный коррелятор флуктуирующей величины оказывается порядка квадрата среднего значения этой величины. Отсюда для средней скорости v_0 в изотропной модели случайной адвекции следует формула (2.67): $v_0 \sim V \left(\frac{a}{\xi}\right)^h$.

В отличие от изотропной среды, в нашей задаче имеются две корреляционных длины. Учитывая, что средняя скорость v_0 направлена вдоль оси z, величина ξ , входящая в (2.67), определяет корреляционную длину именно в этом направлении: $\xi \equiv \xi_{\parallel}$. Поскольку макроскопические величины ξ_{\parallel} и ξ_{\perp} , характеризующие свойства среды по ансамблю реализаций имеют физические размеры координат, то им должны быть приписаны те же масштабные размерности, что и z и ρ . Тогда, в соответствии с масштабными размерностями (3.3), имеем

$$\frac{\xi_{\parallel}}{a_{\parallel}} \approx \left(\frac{\xi_{\perp}}{a_{\perp}}\right)^{\beta}.$$
(3.12)

На расстояниях $z >> \xi_{\parallel}$, $\rho >> \xi_{\perp}$ корреляции флуктуирующих компонент скорости экспоненциально убывают.

На практике именно величина v_0 задается внешними условиями и является параметром, который и определяет размер области фрактальности среды ξ_{\parallel} . Отметим, что в общем случае средняя скорость v_0 может зависеть от координат, но это может быть только на масштабах много больших корреляционной длины, и поэтому нами не рассматривается.

В заключение раздела отметим еще одно важное отличие нашей задачи от изотропной модели случайной адвекции, касающееся структуры корреляционных функций. В изотропном случае наличие симметрии по отношению к инверсии координат приводит к тому, что все корреляторы нечетных порядков равны нулю. Действительно, аргументы корреляционной функции определяются модулями разности между пространственными координатами и не меняются при инверсии координат, а скорости при этом меняют знак на противоположный. В итоге нечетные корреляторы меняют знак, и из требования симметрии должны обращаться в нуль. При наличии выделенного направления (определяемого в нашем случае вектором силы тяжести) симметрия по отношению к замене направления оси Oz на противоположное

82

отсутствует, и компоненты корреляторов, содержащих нечетное количество *z* - компонент скорости, вообще говоря, отличны от нуля.

3.2 Макроскопические уравнения переноса и масштабный анализ

Концентрация примеси, усредненная по ансамблю реализаций, $\bar{c}(\vec{r},t) = \langle c(\vec{r},t) \rangle$, удовлетворяет стандартному уравнению сохранения числа частиц (2.5). В отличие от изотропного случая общее выражение для макроскопической плотности потока частиц примеси теперь принимает вид (ср. с (2.6))

$$J_{i}(\vec{r},t) = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}' f_{ij}(\vec{r}-\vec{r}',t-t') \frac{\partial \overline{c}(\vec{r}',t')}{\partial r_{j}'} - \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{r}' f_{i}(\vec{r}-\vec{r}',t-t') \frac{\partial \overline{c}(\vec{r}',t')}{\partial t'} + v_{0}\overline{c}(\vec{r},t)\delta_{iz}.$$
(3.13)

Здесь функции отклика $f_{ij}(\vec{r},t)$, $f_i(\vec{r},t)$ определяются распределением флуктуирующей части скорости адвекции. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Наша среда после усреднения по ансамблю реализации обладает следующими свойствами симметрии. Во-первых, наличие выделенного направления приводит к отсутствию симметрии при отражении пространства относительно плоскости, перпендикулярной данному направлению $z \rightarrow -z$. Во-вторых, в самой указанной плоскости среда миграции является изотропной.

Учитывая эти свойства, заключаем, что отличными от нуля являются только три компоненты ядра оператора потока (3.13): $f_{zz}, f_{\rho\rho}, f_z$.

Как и раньше мы рассматриваем задачу с начальными условиями $\overline{c}(\vec{r},0) = c^{(0)}(\vec{r})$, без источника в правой части уравнения. Тогда средняя концентрация примеси $\overline{c}(\vec{r},t)$ в произвольный момент времени связана с ее начальным распределением $\overline{c}(\vec{r},0) = c^{(0)}(\vec{r})$ с помощью соотношения

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) = \int G\left(\vec{r}-\vec{r}',t\right)c^{(0)}\left(\vec{r}'\right)d\vec{r}'.$$
(3.14)

Фурье-Лаплас образ функции Грина $G(\vec{r},t)$

$$G_{\vec{k}p} = \int_{0}^{\infty} dt \, e^{-pt} \iint dz \, d^2 \rho \, e^{-i\kappa z - i\vec{q}\vec{\rho}} G(\vec{r}, t), \qquad (3.15)$$

согласно уравнению (2.5) и соотношению (3.13) имеет вид

$$G_{\vec{k}p} = \left(p - M\left(\vec{k}, p\right)\right)^{-1},$$
(3.16)

где

$$M(\vec{k}, p) = -k_i k_j \int_0^{\infty} dt \, e^{-pt} \int d\vec{r} \, e^{-i\vec{k}\vec{r}} f_{ij}(\vec{r}, t) - ik_i p \int_0^{\infty} dt \, e^{-pt} \int d\vec{r} \, e^{-i\vec{k}\vec{r}} f_i(\vec{r}, t) - i\kappa v_0.$$
(3.17)

В дальнейшем функцию $M(\vec{k}, p)$, как и прежде, будем называть массовым оператором. В соответствии с наличием выделенного направления в прямом пространстве, введем продольную κ и поперечные \vec{q} компоненты волнового вектора: $\vec{k} = (\vec{q}, \kappa)$.

Исходя из свойства масштабной инвариантности рассматриваемой анизотропной фрактальной среды, определим масштабные индексы введенных величин. Из определения парного коррелятора и соотношения (3.4) следует значение масштабной размерности продольной компоненты скорости

$$\Delta_{\nu_{\perp}} = -h. \tag{3.18}$$

Учитывая, что при масштабном преобразовании (3.1) элемент объема преобразуется как

$$d^{3}\vec{r} \to \lambda^{1+\frac{2}{\beta}} d^{3}\vec{r} , \qquad (3.19)$$

а полное число частиц в среде

$$N_0 = \int \overline{c}(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} , \qquad (3.20)$$

не меняется, получаем масштабные размерности средней концентрации и функции Грина

$$\Delta_{\overline{c}} = \Delta_G = -\left(1 + \frac{2}{\beta}\right). \tag{3.21}$$

Принимая во внимание то, что по определению $\vec{J} = \langle \vec{v}c \rangle$, и воспользовавшись соотношениями (3.18) и (3.21), получаем масштабные размерности компонент плотности потока

$$\Delta_{J_z} = -\left(1 + h + \frac{2}{\beta}\right),$$

$$\Delta_{J_\rho} = -\left(2 + h + \frac{1}{\beta}\right).$$
(3.22)

Отсюда и из основного уравнения (2.5) следует выражение для масштабной размерности времени

$$\Delta_t = 1 + h \,. \tag{3.23}$$

И, наконец, воспользовавшись соотношением (3.13) имеем для компонент интегральных ядер плотности потока

$$\Delta_{f_z} = -\left(1 + h + \frac{2}{\beta}\right),$$

$$\Delta_{f_{zz}} = -\left(1 + 2h + \frac{2}{\beta}\right),$$

$$\Delta_{f_{\rho\rho}} = -(3 + 2h).$$
(3.24)

Аналогично определяются масштабные размерности величин в Фурье-Лаплас представлении.

Из того, что масштабные размерности произведений pt и \vec{kr} равны нулю, следует, что размерности самих переменных Лапласа и Фурье равны

$$\Delta_p = -\Delta_t = -(1+h), \quad \Delta_\kappa = -1, \quad \Delta_q = -\frac{1}{\beta}. \tag{3.25}$$

В соответствии с определением (3.15) размерность функции Грина в Фурье-Лаплас представлении равна

$$\Delta_{G_{pk}} = 1 + h \,. \tag{3.26}$$

Из соотношения (3.16) следует, что масштабная размерность поляризационного оператора равна размерности переменной Лапласа:

$$\Delta_{M_{pk}} = \Delta_p = -(1+h). \tag{3.27}$$

Отметим, что результаты этого раздела справедливы, только если свойства переноса примеси определяются той частью коррелятора скорости (3.5), которая соответствует интервалу фрактальности. В противном случае перенос примеси описывается классическим уравнением диффузии-адвекции.

3.3 Поведение концентрации примеси

Пространственно-временное поведение концентрации примеси на временах, когда размер облака примеси существенно превосходит начальную величину, определяется (см. (3.14)) функцией Грина. Для ее описания нам необходимо знать свойства массового оператора (3.17).

В данном разделе мы проанализируем поведение концентрации на временах, когда размер облака примеси не превышает величины корреляционного радиуса ξ . Как следует из результатов предыдущей главы, на этих временах перенос частиц в основном определяется флуктуационной компонентой скорости, а смещением частиц вследствие средней скорости адвекции v_0 мы можем пренебречь. Поэтому в данном разделе мы не рассматриваем последнее слагаемое в выражении (3.17).

Исходя из полученных в предыдущем разделе результатов, запишем компоненты ядра потока в следующем общем виде.

$$f_{z} \sim \frac{V}{a_{\parallel}^{3}} \left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{1+h+2/\beta} \varphi_{1}(\eta, \varsigma)$$
(3.28)

$$f_{zz} = \frac{V^2}{a_{\parallel}^2} \left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{1+2h+2/\beta} \varphi_2\left(\eta,\varsigma\right)$$
(3.29)

$$f_{\rho\rho} = \frac{V^2}{a_{\perp}^2} \left(\frac{a_{\parallel}}{z}\right)^{3+2h} \varphi_3(\eta,\varsigma)$$
(3.30)

$$\eta = \frac{z}{\left(a_{\parallel}^{h} V t\right)^{\frac{1}{1+h}}}, \qquad \zeta = \frac{\rho}{\left(a_{\perp}^{\beta(1+h)-1} V t\right)^{\frac{1}{\beta(1+h)}}}, \text{ при } z >> a_{\parallel}, \rho >> a_{\perp}$$
(3.31)

$$f_{z} \sim \frac{V}{a_{\parallel}^{3}}, \ f_{zz} \sim \frac{V^{2}}{a_{\Pi}^{2}}, \ f_{\rho\rho} \sim \frac{V^{2}}{a_{\perp}^{2}} \quad \text{при} \quad z \leq a_{\parallel}, \quad \rho \leq a_{\perp}.$$
 (3.32)

Здесь $\varphi_1(\eta, \varsigma)$ есть безразмерные функции двух автомодельных переменных с нулевой размерностью.

Представим массовый оператор (3.17) в виде

$$M = \kappa^2 M_{\rm II} + q^2 M_{\perp} + i\kappa p M_{ad} , \qquad (3.33)$$

где M_{II} , M_{\perp} , M_{ad} определяются Фурье-Лаплас преобразованиями от f_{zz} , $f_{\rho\rho}$, f_{z} , соответственно.

Заметим следующее. Если основной вклад в интеграл для M_{α} определяется значениями подынтегрального выражения на расстояниях r >> a, то при масштабных преобразованиях (3.1) функции M_{α} будут также масштабно инвариантными величинами, причем для их масштабных размерностей должно выполняться условие

$$\Delta_{M_{\alpha}} > 0. \tag{3.34}$$

В обратном случае $\Delta_{M_{\alpha}} < 0$ интегралы по пространственным переменным будут определяться малыми масштабами $r \approx a$. Тогда экспоненту в интегралах (3.17) можно положить приблизительно равной единице, так что величины M_{α} будут равны константам, не меняющимся при преобразованиях (3.1).

Исходя из этого, ниже при исследовании свойств функции Грина мы рассмотрим три случая: 1) h < 1, $\frac{1}{1+h} < \beta < \frac{2}{1+h}$; 2) h < 1, $1+h > 2/\beta$, 3) h > 1.

1.
$$\frac{1}{1+h} < \beta < \frac{2}{1+h}$$

Замечая, что из (3.33) и (3.17) следуют

$$\Delta_{M_{\mu}} = 1 - h \tag{3.35}$$

$$\Delta_{M_{\perp}} = 2/\beta - 1 - h \tag{3.36}$$

$$\Delta_{M,i} = 1, \qquad (3.37)$$

заключаем, что в данном интервале *h* и *β* основной вклад в интегралы (3.17), дают значения пространственных аргументов из области фрактальности. Следовательно,

массовый оператор является масштабно-инвариантной величиной и, исходя из общих правил, указанных выше, а также значений масштабных размерностей (3.25) и (3.27), получаем следующее представление для M:

$$M = -p\psi(\vartheta,\chi), \quad \vartheta = \kappa \left(\frac{a_{\parallel}^{h}V}{p}\right)^{\frac{1}{1+h}}, \quad \chi = q \left(\frac{a_{\perp}^{\beta(1+h)-1}V}{p}\right)^{\frac{1}{\beta(1+h)}}, \quad (3.38)$$

где $\psi(\vartheta, \chi)$ - безразмерная функция автомодельных переменных, обладающая свойством симметрии

$$\psi(\vartheta, \vec{\chi}) = \psi(\vartheta, -\vec{\chi}), \qquad (3.39)$$

Используя выражение (3.38) и с учетом (3.16), мы можем представить функцию Грина

$$G(z,\vec{\rho},t) = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\kappa d^2 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{pt+i\kappa z+i\vec{q}\cdot\vec{\rho}}}{p-M(\kappa,q,p)}$$
(3.40)

в виде

$$G(z, \vec{\rho}, t) = (a_{\parallel}^{h} V t)^{-\frac{1}{1+h}} (a_{\perp}^{\beta(1+h)-1} V t)^{-\frac{2}{\beta(1+h)}} g(\eta, \varsigma), \qquad (3.41)$$

где переменные η и ς определены формулами (3.31), а безразмерная функция $g(\eta,\varsigma) \to 0$, если $\eta \to \infty$ или $\varsigma \to \infty$. Из соотношения (3.41) следует, что характерные размеры облака примеси в вертикальном и горизонтальном направлениях, соответственно, зависят от времени следующим образом:

$$R_{\parallel}(t) \sim \left(a^{h} V t\right)^{\frac{1}{1+h}},\tag{3.42}$$

$$R_{\perp}(t) \sim \left(b^{\beta^{(1+h)-1}}Vt\right)^{\frac{1}{\beta^{(1+h)}}}.$$
(3.43)

Из этих формул видно, что в диапазоне значений индексов h и β , определяемых соотношениями h < 1, $1 + h < 2/\beta$, перенос примеси по всем направлениям происходит в режиме супердиффузии.

Отметим, что наряду с принятым условием $\beta > 1$, на возможные значения β накладывается еще одно ограничение. Именно, из требования убывания коррелятора с расстоянием (h > 0) и соотношения $1 + h < 2/\beta$ следует, что должно быть $\beta < 2$.

Заметим также, что из условия $1 + h < 2/\beta$ при $\beta > 1$ условие h < 1 следует автоматически.

Для дальнейшего анализа поведения концентрации, рассмотрим асимптотики массового оператора в следующих предельных случаях: 1) $p \neq 0, \vec{k} \rightarrow 0$, 2) $p \rightarrow 0, \vec{k} \neq 0$.

1) $p \neq 0, \vec{k} \to 0$. В этом случае сходимость интегралов по p в соотношении (3.17) обеспечивается множителем e^{-pt} . Зависимость поляризационного оператора от волновых векторов определяется скоростью убывания ядра f_{ik} с расстоянием (при $r \to \infty$) при фиксированном значении времени t. Функция $f_{ik}(r,t)$ в пределе больших r должна убывать быстрее любой отрицательной степени координаты. Действительно, наличие корреляционных функций скорости произвольного порядка может быть обеспечено только функционалом распределения с экспоненциально быстрым убыванием при флуктуациях скорости большой амплитуды. Поэтому при ненулевом значении p в окрестности малых волновых векторов Фурье-Лаплас образы компонент ядра, а вместе с ними и поляризационный оператор должны разлагаться в ряд по целым степеням волнового вектора.

Итак, при
$$\left\{\left(qa_{\perp}\right)^{\beta}, \kappa a_{\parallel}\right\} \ll \left(\frac{a_{\parallel}p}{V}\right)^{\frac{1}{1+h}}$$
 главные члены разложения $M(p, \kappa, \vec{q})$ по κ

и q имеют вид

$$M \sim -p \left(a_{\parallel} i \kappa \left(\frac{a_{\parallel}^{h} V}{p} \right)^{\frac{1}{1+h}} + a_{2} \kappa^{2} \left(\frac{V a_{\parallel}^{h}}{p} \right)^{\frac{2}{1+h}} + a_{3} q^{2} \left(\frac{a_{\perp}^{\beta(1+h)-1} V}{p} \right)^{\frac{2}{\beta(1+h)}} \right), \tag{3.44}$$

где *a*_{*α*} - коэффициенты разложения.

2) $p \to 0, \vec{k} \neq 0$. Здесь необходимо рассмотреть два случая при различном соотношении между κ и \vec{q} .

В случае
$$\left(\frac{a_{\parallel}p}{V}\right)^{\frac{1}{1+h}} << \left(qa_{\perp}\right)^{\beta} << \kappa a_{\parallel}$$
, имеем

$$M(0,\kappa,q) \sim -Va_{\parallel}^{h}\kappa^{1+h}f\left(\frac{q^{\beta}}{\kappa}\right).$$
(3.45)

В обратном пределе $\left(\frac{a_{\parallel}p}{V}\right)^{\frac{1}{1+h}} << \kappa a_{\parallel} << \left(qa_{\perp}\right)^{\beta}$ асимптотика M есть

$$M(0,\kappa,q) \sim -Va_{\perp}^{\beta(1+h)-1}q^{\beta(1+h)}f_2\left(\frac{\kappa}{q^{\beta}}\right).$$
(3.46)

Из вида асимптотики поляризационного оператора (3.44) при малых значениях волнового вектора следует существенное отличие поведения облака концентрации примеси по сравнению с изотропным случаем. В изотропном случае существовали только четные пространственные моменты концентрации примеси по каждой из координат. В частности, для второго момента пространственного распределения концентрации по *z*

$$\left\langle z^{2}\right\rangle = N_{0}^{-1} \int z^{2} \overline{c} \left(\vec{r}, t \right) dz d^{2} \rho, \qquad (3.47)$$

где N₀ определяется формулой (3.20), элементарные вычисления дают

$$\left\langle z^{2} \right\rangle = -\int \frac{\partial^{2}}{\partial \kappa^{2}} G_{\bar{k}p} \bigg|_{\kappa=0,q=0} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \sim \sim \int \left[p \frac{\partial^{2} M_{\bar{k}p}}{\partial \kappa^{2}} - 2 \left(\frac{\partial^{2} M_{\bar{k}p}}{\partial \kappa^{2}} \right) \right] \bigg|_{\kappa=0,q=0} \frac{e^{pt}}{p^{3}} \frac{dp}{2\pi i} \sim \left(a^{h} Vt \right)^{\frac{2}{1+h}} \sim R_{\parallel} \left(t \right)^{2},$$

$$(3.48)$$

на временах, когда размер облака примеси значительно превосходит его первоначальную величину: $R_{\parallel}(t) >> R_{\parallel}(0)$.

Первый же момент концентрации по координате *z* :

$$\left\langle z \right\rangle = N_0^{-1} \int z \overline{c} \left(\overline{r}, t \right) dz \, d^2 \rho = \int \frac{\partial}{\partial \kappa} G_{\overline{k}p} \bigg|_{\kappa=0,q=0} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \sim \left. \left. - \int \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial \kappa} M \left(p, \kappa, q \right) \right|_{\kappa=0,q=0} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i},$$

$$(3.49)$$

был равен нулю, поскольку разложение поляризационного оператора $M(p,\kappa,q)$ по волновым векторам вблизи нуля начиналось с квадратичных членов. Таким образом, облако примеси расплывалось симметрично.

В нашем случае из асимптотики (3.44) следует, что выражение (3.49) отлично от нуля, причем

$$\langle z \rangle \sim \sqrt{\langle z^2 \rangle} = R_{\parallel}(t)$$
 (3.50)

Таким образом, имеет место зависящий от времени дрейф облака примеси, так что смещение центра масс облака описывается той же временной зависимостью, что и расплывание самого облака. Подчеркнем, что это справедливо на временах, когда размеры облака (и, следовательно, смещение центра масс облака) существенно меньше величины корреляционного радиуса, $t \ll t_{\xi}$, где t_{ξ} определяется из условия

$$t_{\xi} \approx \frac{\xi_{\parallel}^{1+h}}{a^{h}V} = \frac{\xi_{\parallel}}{v_{0}}$$
(3.51)

Рассмотрим поведение функции Грина на асимптотически больших расстояниях (много больших размеров основного облака примеси).

Описание хвостов концентрации удобно проводить отдельно для двух областей (относительно больших и малых значений вертикальных координат), разделенных границей $z = \tilde{Z}(\rho, t)$. Выражение для $z = \tilde{Z}(\rho, t)$ мы определим ниже.

В области $z \gg \tilde{Z}(\rho, t)$, вытянутой вдоль оси z, вычисления в (3.40) будем проводить в следующем порядке. Сначала выполним интегрирование по переменной κ , рассматривая переменную q как малый вещественный положительный параметр, и предполагая, что величина q удовлетворяет условию $(qa_{\perp})^{\beta} << \kappa a_{\parallel}$. Тогда исходя из установленных асимптотических выражений для поляризационного оператора (3.44)-(3.46), можно утверждать, поляризационный оператор как функция κ имеет точку ветвления $i\kappa_b(p,q)$, лежащую при вещественных p и q на мнимой оси, в которой $M(p,\kappa,q)$ обращается в бесконечность:

$$M\left(p,\kappa,q\right) \sim -\frac{\kappa^2}{\left(\kappa - i\kappa_b\left(p,q\right)\right)^{\frac{1-h}{2}}}.$$
(3.52)

Сдвигая контур интегрирования по переменной κ в (3.40) в верхнюю полуплоскость, получаем, что значение интеграла определяется вычетом в ближайшем к вещественной оси полюсе $\kappa_0(p,q)$, который находится из уравнения

$$p - M(p, \kappa, q) = 0. \tag{3.53}$$

Учитывая разложение поляризационного оператора (3.44) по q при $(qa_{\perp})^{\beta} << \left(\frac{a_{\parallel}p}{V}\right)^{\frac{1}{1+h}}$, находим приближенное выражение для полюса $\kappa_0(p,q)$:

$$\kappa_0(p,q) \approx i \left(Bp^{\frac{1}{1+h}} + Fp^{\frac{1-2/\beta}{1+h}}q^2 \right), \tag{3.54}$$

где величины *B* и *F* вещественны и положительны и определяются решением уравнения (3.53). В итоге интеграл (3.40) с точностью до предэкспоненциального множителя принимает вид

$$G \sim \int \frac{dp}{2\pi i} \iint \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \exp\left(pt - Bp^{\frac{1}{1+h}}z - Fp^{\frac{1-2/\beta}{1+h}}z q^2 + i\vec{q}\vec{\rho}\right).$$
(3.55)

Основной вклад в интеграл по *р* дают значения переменной Лапласа вблизи точки перевала и определяются соотношением

$$p_0 \sim t^{-1} \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^{\frac{1+h}{h}}.$$
 (3.56)

Интеграл по $d^2 \vec{q}$ - гауссов, поэтому вычисляется точно, и основной вклад в него дают значения \vec{q} порядка

$$q_0 \sim \frac{\rho}{z} p_0^{\frac{2/\beta - 1}{1 + h}}.$$
 (3.57)

Окончательно, интегрирование (3.55) дает следующую оценку асимптотики концентрации на больших расстояниях

$$G \sim \exp\left(-\Gamma_{\parallel} - \left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^2 \Gamma_{\parallel}^{\frac{2}{\beta(1+h)}^{-1}}\right), \qquad (3.58)$$

где величина $\Gamma_{\parallel}>>1$ определяется соотношением

$$\Gamma_{\parallel} \sim \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^{\frac{1+h}{h}}.$$
(3.59)

Условием вывода данного выражения было неравенство $\kappa a_{\parallel} >> (q a_{\parallel})^{\beta}$. Учитывая, что основной вклад в интеграл по κ дают значения переменной вблизи κ_0 из (3.54), и используя для оценки q формулы (3.57) и (3.56), получаем, что неравенство $\kappa a_{\parallel} >> (q a_{\parallel})^{\beta}$ выполняется в области

$$z \gg \tilde{Z}(\rho, t) \approx \rho^{\beta} \left(\frac{R_{\perp}(t)}{\rho}\right)^{\frac{\beta(\beta-1)(1+h)}{(\beta-1)+\beta h}}.$$
(3.60)

Заметим, что область (3.60), в которой асимптотика концентрации описывается выражением (3.58), при $\rho >> R_{\perp}(t)$ и фиксированном z охватывает бо́льшие значения ρ , чем область $z >> \rho^{\beta}$, причем граница (3.60) зависит также и от времени.

В области $z \ll \tilde{Z}(\rho, t)$ вычисления проводятся аналогично, за исключением того, что сначала в (3.55) надо вычислить интеграл по $d^2 \vec{q}$. Интегрируя по углу, с учетом известного интегрального представления функции Бесселя

$$\int_{0}^{2\pi} e^{iz\cos\theta} d\theta = J_0(z),$$

получаем

$$G = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{qdq}{2\pi} \frac{e^{pt+i\kappa z} J_0(q\rho)}{p - M(p,\kappa,q)}.$$
(3.61)

Далее, пользуясь соотношением между функций Бесселя и функциями Ханкеля:

$$J_{0}(q\rho) = \frac{H_{0}^{(1)}(q\rho) + H_{0}^{(2)}(q\rho)}{2},$$

и с учетом (см. [90])

$$H_0^{(2)}(q\rho e^{-\pi i}) = -H_0^{(1)}(q\rho), \qquad (3.62)$$

интегрирование по dq в (3.61) можно распространить от $-\infty + i0$ до $+\infty + i0$:

$$G = \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{qdq}{4\pi} \frac{e^{pt+i\kappa z} H_0^{(1)}(q\rho)}{p-M(p,\kappa,q)}.$$
(3.63)

Теперь учтем, что основной вклад в интеграл (3.61) дают значения $q\rho >> 1$, и, следовательно, можно использовать асимптотические разложения функций Ханкеля для больших значений аргумента. После этого, проводя те же вычисления, что и в предыдущем случае, приходим (с точностью до предэкспоненциального множителя) к следующему выражению для асимптотики концентрации

$$G \sim \exp\left(-\Gamma_{\perp} - \left(\frac{z - R_{\parallel}(t)}{R_{\parallel}(t)}\right)^2 \Gamma_{\perp}^{\frac{1-h}{1+h}}\right), \tag{3.64}$$

справедливом в области $z << \widetilde{Z}(\rho, t),$ где $\Gamma_{\perp} >> 1$ определяется соотношением

$$\Gamma_{\perp} \sim \left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^{\frac{\beta(1+h)}{\beta(1+h)-1}}.$$
(3.65)

2. $\beta > \frac{2}{1+h}$

В этом случае, из h < 1 и выражения (3.35) следует, что свойства M_{\parallel} сохраняются, и вклад, даваемый этим слагаемым в поляризационный оператор, попрежнему, имеет масштабно инвариантный вид:

$$M_{\parallel} \sim k^{1+h} \tilde{f}\left(\frac{\left(Va^{h}k\right)^{1+h}}{p}, \frac{\left(a_{\perp}q\right)^{\beta}}{a_{\parallel}k}\right).$$
(3.66)

Что же касается аналогичного интеграла для M_{\perp} , то очень быстрое убывание корреляций скорости с расстоянием приводит к тому, что интегралы сходятся на малых масштабах, так что M_{\perp} есть просто константа. В итоге, выражение для массового оператора принимает вид:

$$M \sim -A_{\parallel} \kappa^{1+h} \tilde{f}\left(\frac{\kappa^{1+h}}{p}, \frac{q^{\beta}}{\kappa}\right) - A_{\perp} q^2 \,. \tag{3.67}$$

Формула (3.67) на первый взгляд содержит противоречие, связанное с тем, что масштабная размерность q, определяемая вторым слагаемым в (3.67) отличается от размерности, следующей из вида (3.66). Однако нетрудно видеть, что при выполнении условия $\frac{2}{1+h} < \beta$ в области значений волновых векторов $\kappa^{1+h} >> q^2$ (то есть когда

вклад первого слагаемого является доминирующим) выполняется соотношение $q^{\beta} << \kappa$, так что поправками, связанными со вторым аргументом функции \tilde{f} заведомо можно пренебречь.

Из (3.67) следуют формулы, характеризующие расплывание облака примеси со временем:

$$R_{\parallel}(t) \sim \left(a^{h} V t\right)^{\frac{1}{1+h}},\tag{3.68}$$

$$R_{\perp} \sim \sqrt{A_{\perp}t} \,. \tag{3.69}$$

Для выяснения характера асимптотического поведения концентрации примеси на больших расстояниях, замечаем, что для области волновых переменных $\kappa^{1+h} >> q^2$ «характеристическое» уравнение (3.53) для вычета $\kappa_0(p,q)$ с учетом формулы (3.67) можно представить в виде

$$1 + \frac{A_{\perp}q^2}{p} + \frac{A_{\parallel}\kappa^{1+h}}{p} \tilde{f}\left(\frac{\left(Va_{\parallel}^h\kappa\right)^{1+h}}{p}\right) = 0, \qquad (3.70)$$

откуда, разлагая выражения для корня уравнения (3.70) $\kappa_0(p,q)$ по малой величине $\frac{A_\perp q^2}{p}$ <<1, получаем

$$\kappa_0(p,q) \approx i \left(\widetilde{B} p^{\frac{1}{1+h}} + \widetilde{F} p^{-\frac{h}{1+h}} q^2 \right).$$
(3.71)

После этого, интеграл по переменной *p* берется методом перевала. Интеграл по *q* гауссов и легко вычисляется. В итоге с точностью до предэкспоненциального множителя приходим к выражению для хвоста профиля концентрации:

$$G \sim \exp\left(-\Gamma_{\parallel} - \left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^{2}\right), \qquad (3.72)$$

где величина Γ_{\parallel} определяется соотношением (3.59).

Учитывая, что основной вклад в интегралы дают значения переменных интегрирования порядка

$$\kappa_* \sim p^{\frac{1}{1+h}}, p_* \sim t^{-1} \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^{\frac{1+h}{h}}, q_* \sim \left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^2,$$
(3.73)

заключаем, что выражение (3.72) справедливо в области, определяемой неравенством

$$\left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^{2h} << \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^{1+h}.$$
(3.74)

Аналогичные вычисления для случая $\kappa^{1+h} << q^2$ приводят к результату, что в области

$$\left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^{2h} \gg \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^{1+h}$$
(3.75)

выражение для асимптотики концентрации принимает вид

$$G \sim \exp\left(-\tilde{\Gamma}_{\perp} - \left(\frac{z}{R_{\parallel}(t)}\right)^2 \tilde{\Gamma}_{\perp}^{\frac{1-h}{2(1+h)}}\right), \qquad (3.76)$$

где главный фактор, определяющий убывание концентрации в области (3.75) есть

$$\tilde{\Gamma}_{\perp} \sim \left(\frac{\rho}{R_{\perp}(t)}\right)^2. \tag{3.77}$$

3. *h* > 1

В этом случае при интегрировании выражения (3.17) основной вклад определяется значениями пространственных переменных $z \sim a_{\parallel}$, $\rho \sim a_{\perp}$. Поэтому величины M_{\parallel} и M_{\perp} независимо от величины волнового вектора определяются выражениями (3.80) и (3.81) (см. ниже), где нужно сделать замену $v_0 \rightarrow V$, $\xi_{\parallel} \rightarrow a_{\parallel}$, $\xi_{\perp} \rightarrow a_{\perp}$. В итоге поляризационный оператор принимает классический вид, и концентрация примеси описывается выражением (3.84) с учетом указанных выше замен.

3.4 Режим переноса на больших временах

Как указано выше, корреляционные соотношения (3.5), (3.8) и (3.10) справедливы на масштабах меньше длины корреляции $z \ll \xi_{\parallel}$, $\rho \ll \xi_{\perp}$. На масштабах больше ξ_{α} , $\alpha = \parallel, \perp$ коррелятор скорости, а вместе с ним и компоненты ядра плотности потока примеси (3.28)-(3.30) убывают экспоненциально.

В соответствии с этим, при стремлении к нулю волнового вектора интегралы типа (3.17) для M_{\parallel} и M_{\perp} становятся, начиная с некоторого значения волнового вектора, независящими от него константами. Это значение определяется условиями

$$\kappa_* \xi_{\parallel} \sim 1 \quad \text{M} \quad q_* \xi_{\perp} \sim 1. \tag{3.78}$$

В этом пределе в интеграле (3.17) можно положить значение экспоненциального множителя равным приблизительно единице, в результате чего значение M_{\parallel} по порядку величины будет равно

$$M_{\parallel} \sim V \left(\frac{a_{\parallel}}{\xi_{\parallel}}\right)^{h} \xi_{\parallel}.$$
(3.79)

Замечая, что произведение первых двух сомножителей в (3.79) есть средняя скорость просачивания, определяемая формулой (2.66), заключаем, что величина M_{\parallel} есть не что иное, как эффективный коэффициент диффузии, определяемый формулой

$$M_{\parallel} = D_{\xi \parallel} \sim v_0 \xi_{\parallel} \,. \tag{3.80}$$

Аналогично получаем оценку для M_{\perp} :

$$M_{\perp} = D_{\xi \perp} \sim \xi_{\perp}^2 t_{\xi}^{-1}. \tag{3.81}$$

Кроме того, на этих временах мы должны учесть последнее слагаемое в (3.33), которое имеет вид *ikv* и соответствует дрейфу с постоянной скоростью. Легко видеть, что вклад от *ikpM_{ad}* аналогичен вкладу от *ikv*₀, что приводит к некоторой перенормировке скорости дрейфа $v_0 \rightarrow \tilde{v}_0$.

Если теперь мы интересуемся поведением основного облака примеси, то в выражении для функции Грина (3.40) основной вклад в интегралы дают значения переменной Лапласа и волновых векторов порядка

$$p \sim t^{-1}, \ k \sim r^{-1},$$
 (3.82)

и для больших времен $t >> t_{\xi}$, вид массового оператора соответствует классическому уравнению диффузии-адвекции с эффективным анизотропным коэффициентом диффузии (3.80), (3.81):

$$M = -i\kappa\tilde{v}_0 + D_{\xi\parallel}\kappa^2 + D_{\xi\perp}q^2.$$
(3.83)

В итоге выражение для концентрации принимает вид

$$G \approx \frac{1}{\left(4\pi\right)^{3/2} D_{\xi \perp} \sqrt{D_{\xi \parallel} t^{3/2}}} \exp\left(-\frac{\left(z - \tilde{v}_0 t\right)^2}{4 D_{\xi \parallel} t} - \frac{\rho^2}{4 D_{\xi \perp} t}\right).$$
(3.84)

На расстояниях много больших размера основного облака примеси интеграл в (3.40) определяется волновыми векторами

$$\kappa \sim \frac{z}{2D_{\xi\parallel}t}, \quad q \sim \frac{\rho}{2D_{\xi\perp}t}, \tag{3.85}$$

и на расстояниях

$$z \gg v_0 t, \quad \rho \gg v_0 t \tag{3.86}$$

при вычислениях нужно использовать поляризационный оператор в виде (3.45), (3.46). В итоге, на этих расстояниях хвосты концентрации определяются формулами (3.58) и (3.64), и структура хвостов оказывается двухступенчатой.

3.5 Выводы

Основными результатами данной главы являются следующие.

Построена модель переноса примеси во фрактальной среде с сильной анизотропией, обусловленной наличием силы тяжести. Из анализа структуры корреляционных функций скоростей установлено, что режимы переноса примеси в поле случайной адвекции определяются двумя параметрами h и β . В работе рассмотрен случай $1 < \beta < 2$.

Исходя из вида оператора потока частиц примеси и на основе полученных масштабных размерностей компонент ядра этого оператора, определены интервалы значений параметров h и β , при которых перенос происходит в аномальном режиме.

При $h < \frac{2}{\beta} - 1$ перенос происходит в супердиффузионном режиме во всех

направлениях, причем скорость роста облака примеси вдоль вектора силы тяжести больше скорости в поперечном направлении. Убывание концентрации на больших расстояниях описывается экспоненциальным, сужающимся к вертикальной оси распределением.

При
$$\frac{2}{\beta}$$
 – 1 < *h* < 1 режим переноса вдоль вертикального направления оказывается,

по-прежнему, супердиффузионным, а в поперечном направлении – классическим гауссовым. Анализ поведения концентрации на больших расстояниях показывает, что хвосты концентрации в этом случае не являются гауссовыми ни в одном из направлений.

При h > 1 перенос происходит в режиме анизотропной диффузии-адвекции.

На больших временах, когда размер облака примеси превышает корреляционную длину среды, перенос также происходит в режиме анизотропной диффузии-адвекции, но при этом тензор коэффициента диффузии определяется величиной корреляционной длины. Хвосты в этом случае являются двухступенчатыми.

ГЛАВА 4

ФРАКТАЛЬНЫЕ ДВУПОРИСТЫЕ (ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ) СРЕДЫ

В данной главе будет сделано обобщение рассмотренной выше модели переноса во фрактальных средах на среды с двумя типами пористости. До сих пор (в главах 2, 3), при рассмотрении фрактальных сред мы считали, что перенос примеси определяется исключительно миграцией частиц по хорошо проводящим областям. С другой стороны, как показано в главе 1, наличие слабопроницаемых областей приводит замедлению переноса, так что слабопроницаемая среда играет для примеси роль ловушки. Таким образом, возникает необходимость в построении общей модели, включающей как перенос примеси, обусловленный адвекцией по системе каналов с фрактальными свойствами, так и уход примеси в ловушки.

Следует отметить, что данная модель решает задачу переноса примеси в перколяционных средах. Действительно, перколяционный кластер, определяющий область, по которой переносится примесь, имеет две части [44] (см. Рис. 4.1)



Рис. 4.1 Схематическое изображение перколяционного кластера. Остов выделен жирными линиями, мертвые концы – тонкими линиями.

Одна часть – остов – соединяет удаленные области среды. Именно по остову происходит просачивание раствора и перенос примеси на большие расстояния. Другая часть перколяционного кластера – мертвые концы – присоединены к остову каждый только в одном месте. Если частица попадает в мертвые концы, она остается локализованной в них, и для того, чтобы продвигаться дальше, она должна вернуться в остов. Движения жидкости в мертвых концах нет, и миграция примеси в них происходит по механизму диффузии. Таким образом, мертвые концы являются ловушками. Аналогичную роль может играть и окружающая перколяционный кластер матрица, если она является пористой и слабопроницаемой, так что примесь может в ней диффундировать, но адвекцией в ней можно пренебречь. В этом случае уход в матрицу и возвращение в остов примеси происходит в разных точках, но при этом смещение частиц вдоль остова мало по сравнению переносом вдоль остова в результате адвекции, поэтому этим смещением можно в первом приближении пренебречь.

Целью настоящей главы является построение модели и анализ режимов переноса в перколяционных средах с конечным радиусом корреляции с учетом действия ловушек, когда механизмом переноса по остову перколяционного кластера является адвекция.

Дальнейшая структура главы следующая. Во втором разделе описана модель и проанализированы режимы переноса для квазиизотропной среды. В разделе 3 развита модель анизотропной случайной адвекции с ловушками и конечным радиусом корреляции. Здесь же описаны режимы переноса для данного случая. В заключении приведены основные выводы главы.

4.1 Квазиизотропный случай

Постановка задачи

Рассматривается поведение примеси в среде, в которой каналы миграции определяются перколяционным кластером. Механизмом переноса частиц примеси в остове является адвекция и диффузия, а в мертвых концах – диффузия. Уравнение, описывающее эволюцию концентрации $c(\vec{r},t)$ внутри кластера, имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div \left(\vec{v}c - D\nabla c \right) = 0, \qquad (4.1)$$

101

где скорость адвекции $\vec{v}(\vec{r})$ является случайной функцией координат (отличной от нуля только внутри каналов остова) и в силу несжимаемости жидкости удовлетворяет условию (2.3). Мы рассматриваем случай, когда поле скоростей инфильтрации не зависит от времени.

Нас, в первую очередь, будет интересовать поведение примеси в остове, поскольку именно она определяет перенос на большие расстояния. После усреднения по ансамблю реализаций среды уравнение (4.1) для данной части примеси принимает стандартный вид

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + div \, \overline{q} = Q \,. \tag{4.2}$$

Здесь $\overline{c}(\vec{r},t)$ есть усредненная концентрация примеси в остове, которую ниже мы будем называть активной концентрацией.

Поток \vec{q} обусловлен адвекцией по системе каналов, принадлежащих остову, и определяется полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$. В общем случае имеется отличная от нуля средняя скорость, так что $\vec{v}(\vec{r})$ можно разбить на две части: среднюю,

$$\vec{u} = \left\langle \vec{v} \right\rangle,\tag{4.3}$$

и флуктуирующую часть

$$\vec{\tilde{v}} = \vec{v} - \vec{u} , \left\langle \vec{v} \right\rangle = 0 . \tag{4.4}$$

В итоге поток можно представить в виде

$$j_{i} = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int f_{ik} \left(\vec{r} - \vec{r}', t - t' \right) \frac{\partial \overline{c} \left(\vec{r}', t' \right)}{\partial r_{k}} d\vec{r}' + u_{i} \overline{c} .$$

$$(4.5)$$

где ядро f_{ik} определяется флуктуациями $\vec{\tilde{v}}(\vec{r})$.

В правой части (4.2) *Q* описывает диффузионный обмен примеси между остовом и мертвыми концами. В общем виде, с учетом локальности ловушек, его можно представить в виде

$$Q = \frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{t} \varphi(t - t') \overline{c}(\vec{r}, t') dt'.$$
(4.6)

Как и в предыдущих главах, рассматриваем задачу с начальными условиями

$$\overline{c}\left(\vec{r},0\right) = c_0\left(\vec{r}\right),\tag{4.7}$$

так что усредненная концентрация примеси может быть выражена через начальное распределение:

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) = \int G\left(\vec{r}-\vec{r}',t\right)c_0\left(\vec{r}'\right)d\vec{r}',\qquad(4.8)$$

где $G(\vec{r},t)$ есть функция Грина уравнения (4.2). С учетом (4.5) и (4.6) функция Грина в представлении Фурье-Лапласа имеет вид

$$G_{\mathbf{k},p} = \left[p + p \, \varphi(p) + i \vec{k} \vec{u} - M(\vec{k}, p) \right]^{-1}, \tag{4.9}$$

где

$$M(\vec{k}, p) = -k_i k_j \int_0^\infty dt \, e^{-pt} \int d\vec{r} \, e^{-i\vec{k}\vec{r}} f_{ij}(\vec{r}, t), \qquad (4.10)$$

$$\varphi(p) = \int_{0}^{\infty} dt \, e^{-pt} \varphi(t) \,. \tag{4.11}$$

Режимы переноса будем характеризовать следующими величинами: полным числом активных частиц примеси

$$N(t) = \int \overline{c}(\vec{r}, t) d\vec{r} , \qquad (4.12)$$

средним смещением частиц вдоль вектора средней скорости

$$\langle r_{\parallel} \rangle = N^{-1}(t) \int \overline{c}(\vec{r},t) r_{\parallel} d\vec{r}, \quad r_{\parallel} = \frac{(\vec{r}\vec{u})}{|\vec{u}|},$$

$$(4.13)$$

и дисперсией $R^2(t)$. Будем различать продольную (вдоль направления вектора средней скорости) и поперечную дисперсии:

$$R_{\parallel}^{2}(t) = N^{-1}(t) \int \overline{c}(\vec{r},t) (r_{\parallel} - \langle r_{\parallel} \rangle)^{2} d\vec{r}$$

$$(4.14)$$

$$R_{\perp}^{2}(t) = N^{-1}(t) \int \overline{c}(\vec{r},t) r_{\perp}^{2} d\vec{r}, \ \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \frac{\vec{u}(\vec{r}\vec{u})}{u^{2}}.$$
(4.15)

Отметим, что величины $R_{\alpha}(t)$, определенные в (4.14) и (4.15) описывают также размер облака, содержащего основное количество частиц примеси.

Как указывалось во введении, главной отличительной чертой перколяционной среды на масштабах меньших корреляционного радиуса является свойство самоподобия. Это позволяет воспользоваться идеями теории критических явлений, и, в частности, рассматривать процессы переноса с точки зрения их масштабной инвариантности. Последнее подразумевает, что макроскопические уравнения должны быть инвариантными при одновременном преобразовании пространственных координат

$$\vec{r} \to \lambda \vec{r}$$
 (4.16)

и всех остальных входящих в уравнения (4.2)-(4.11) величин

$$A \to \lambda^{\Delta_A} A \,, \tag{4.17}$$

Здесь λ есть действительный положительный безразмерный параметр, а показатели степени Δ_A носят название масштабных размерностей величин A.

Как показано в главе 2, данное свойство приводит к тому, что парный коррелятор скорости для изотропной задачи можно представить в виде

$$K_{ij}^{(2)}(\vec{r}) \cong V^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2h},$$
 (4.18)

где $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, *h* есть масштабная размерность скорости, а *V* есть средняя амплитуда флуктуаций скорости. Данное выражение справедливо в области фрактальности:

$$a \ll r \ll \xi \,. \tag{4.19}$$

где *а* есть нижний предел фрактальности. На масштабах $r >> \xi$ среда становится статистически однородной, так что корреляционные функции скорости убывают экспоненциально быстро.

Для средней скорости просачивания в перколяционной среде справедливо выражение (см. (2.67))

$$u \sim V \left(\frac{a}{\xi}\right)^h,\tag{4.20}$$

из сравнения которого с (4.18) следует, что влиянием средней скорости на перенос на масштабах *r* << *ξ* можно пренебречь.

Как показано во второй главе, при значениях h < 1 перенос в области фрактальности определяется длинными коррелированными скачками, что и приводит к аномальным режимам переноса. В обратном случае h > 1 главный вклад в перенос определяется распределением скоростей на масштабах порядка a, что соответствует механизму классической диффузии. Мы ограничимся нетривиальным случаем h < 1.

В отличие от рассмотренных ранее моделей, в данном случае важной характеристикой среды является «мощность» ловушек, определяемых наличием мертвых концов. Поскольку совокупность каналов, образованных мертвыми концами также имеет фрактальную структуру, то и перенос по ним в определенном интервале времени $\tau_1 \ll t \ll \tau$ будет обладать свойством самоподобия. В таком случае свойства ловушек удобно описывать с помощью введения масштабной размерности ядра $\varphi(t)$ (или, что эквивалентно, размерности Q), так что при преобразовании (4.16) соотношение (4.17) приобретает вид

$$\varphi(t) \to \lambda^{-\omega} \varphi(t). \tag{4.21}$$

Аналогично, как и для корреляционной функции скорости (4.18), выражение для $\varphi(t)$ в интервале самоподобия можно представить в виде

$$\varphi(t) \sim \tau_1^{-1} \left(\frac{\tau_1}{t}\right)^{\alpha}, \quad \tau_1 << t << \tau.$$
 (4.22)

Отметим, что индексы α и ω связаны соотношением $\alpha = \omega/\Delta_t$, где Δ_t есть масштабная размерность времени.

Ниже для описания режимов переноса мы будем в качестве независимого параметра рассматривать α , поскольку именно этот параметр определяется структурой ловушек. Будем считать, что значения α лежат в диапазоне $0 < \alpha < 1$. Левая граница данного интервала определяется естественным условием убывания со временем потока примеси в мертвые концы. Условие на правой границе позволяет считать, что в уравнении (4.2), начиная с момента времени τ_1 , вклад ловушек Q превосходит вклад, определяемый производной по времени от концентрации $\overline{c}(\vec{r},t)$.

Верхняя граница интервала самоподобия τ есть время насыщения ловушек примесью. Данное время определяется режимом переноса вдоль мертвых концов и их характерной длиной. Поскольку мертвые концы сами по себе являются фрактальными кластерами, их характерная длина пропорциональна некоторой степени ξ . В итоге, в общем случае, имеем

$$\tau = \tau(\xi), \tag{4.23}$$

где вид функции $\tau(\xi)$ зависит от размерности мертвых концов и остова и режима переноса по мертвым концам (но не по остову).

На временах $t >> \tau$, ядро быстро (экспоненциально) убывает. На малых временах, $t < \tau_1$, вклад ловушек Q в уравнение для активной концентрации (4.2) не превосходит вклада, определяемого производной от концентрации по времени, поэтому для оценки будем считать

$$\varphi(t) \sim \tau_1^{-1}, \quad t < \tau_1 . \tag{4.24}$$

Режимы переноса в квазиизотропной перколяционной среде

Ниже для определенности будет проанализирован случай, когда характерное время адвекции на расстояние порядка a, $\tau_0 \sim a/V$, много меньше времени τ_1 , когда становится существенным действие ловушек: $\tau_0 << \tau_1$. Обратный случай рассматривается аналогично.

В интервале <u>т₀ << t << т₁, перенос примеси уже определяется коррелированными флуктуациями скорости (4.18), в то время как действием ловушек *Q* в правой части (4.2) можно пренебречь. В главе 2 было показано, что в этом случае масштабные размерности основных величин имеют вид</u>

$$\Delta_G = -3, \quad \Delta_f = -(2h+3), \quad \Delta_t = 1+h, \quad (4.25)$$

и выражение для ядра $f_{ii}(\vec{r},t)$ можно представить в виде

$$f_{ij}(\vec{r},t) = \frac{V^2}{a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^{2h+3} \psi(\eta), \quad r >> a$$
(4.26)

$$f_{ij}\left(r,t\right) \sim \frac{V^2}{a^3}, \quad r \le a \tag{4.27}$$

где $\psi(\eta)$ есть безразмерная функция безразмерной переменной

$$\eta = \frac{r}{\left(a^{h}Vt\right)^{\frac{1}{1+h}}}.$$
(4.28)

Подчеркнем, что выражения (4.26)-(4.28) справедливы при $r \ll \xi$, $t \ll \tau_1$. Из (4.26) и (4.27) следует, что основной вклад в интеграл (4.10) (при $h \ll 1$) дают значения пространственной переменной $r \gg a$. Отсюда, подставляя выражение (4.26) в (4.10), для масштабной размерности M получаем

$$\Delta_{M} = -(1+h). \tag{4.29}$$

Учитывая также

$$\Delta_p = -(1+h), \quad \Delta_k = -1, \tag{4.30}$$

приходим к следующему представлению для *M* :

$$M\left(\vec{k},p\right) = -p\phi_{1}\left(\vartheta_{1}\right), \quad \vartheta_{1} = k\left(\frac{a^{h}V}{p}\right)^{\frac{1}{1+h}}, \quad k = \left|\vec{k}\right|, \tag{4.31}$$

где $\phi_1(\mathcal{G}_1)$ есть также безразмерная функция.

На основе изложенного и исходя из формулы (4.9), в которой можно пренебречь $i\vec{k}\vec{u}$ (см. замечание после формулы (4.20)), а также $p\varphi(p)$ по сравнению с p, выражение для функции Грина в данном интервале времени сводится к

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\vec{k}}{\left(2\pi\right)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p-M\left(\vec{k},p\right)},$$
(4.32)

и с учетом (4.31) может быть представлено в виде

$$G_{1}(\vec{r},t) = R_{1}(t)^{-3} g_{1}(\zeta_{1}).$$
(4.33)

где

$$R_1(t) \sim (a^h V t)^{1/(1+h)},$$
 (4.34)

а $g_1(\zeta)$ безразмерная функция безразмерной переменной $\zeta_1 = r/R_1(t)$, имеющая асимптотики $g_1(0) \neq 0, \infty$ и $g_1(\zeta_1) \to 0$ при $\zeta_1 \to \infty$.

Как указано выше, на данных временах (в силу $R_1 << \xi$) переносом со средней скоростью можно пренебречь, так что среда остается изотропной. Поэтому продольная и поперечная дисперсии примеси совпадают $R_{\parallel}^2 = R_{\perp}^2 \approx R_1^2$, и, с учетом h < 1, определяются супердиффузионной закономерностью.

В следующем временном интервале $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$, где верхняя граница τ_2 будет определена ниже, перенос по остову, по-прежнему, определяется случайной адвекцией с медленно убывающим коррелятором (4.18), но при этом становится существенным действие ловушек.

Интегрирование уравнения (4.2) по всему пространству с учетом соотношения $\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} << Q$ и выражения (4.22) приводит к следующей зависимости полного числа активных частиц от времени:

$$N(t) \cong \tilde{N}(t) = N_0 \left(\frac{\tau_1}{t}\right)^{1-\alpha}, \qquad (4.35)$$

где

$$N_{0} = \int c_{0}(\vec{r}) \, d\vec{r} \,. \tag{4.36}$$

В этом диапазоне масштабные индексы времени и ядра потока (4.5) принимают вид

$$\Delta_t = \frac{1+h}{\alpha}, \quad \Delta_f = -\left(2+h+\frac{1+h}{\alpha}\right), \tag{4.37}$$

и, как и в предыдущем случае, основной вклад в интеграл (4.10) дают значения пространственной переменной *r* >> *a*. В итоге масштабная размерность *M* становится равной

$$\Delta_{M} = -\frac{1+h}{\alpha},\tag{4.38}$$

так что сама величина М представима в виде
$$M\left(\vec{k},p\right) = -\varphi\left(p\right)\phi_{2}\left(\vartheta_{2}\right), \quad \vartheta_{2} = k\left(\frac{a^{h}V}{\varphi(p)}\right)^{\frac{1}{1+h}},$$
(4.39)

 $\phi_{l}(\mathcal{G}_{l})$ есть также безразмерная функция.

Функцию Грина, определяемую теперь выражением

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p\varphi(p) - M(\vec{k},p)},$$
(4.40)

(где в знаменателе, по-прежнему, опущено слагаемое $i\vec{k}\vec{u}$, но теперь $p \ll p\varphi(p)$) можно представить в виде

$$G_{2}(\vec{r},t) = \frac{\tilde{N}(t)}{N_{0}} R_{2}(t)^{-3} g_{2}(\zeta_{2}), \qquad (4.41)$$

где

$$R_{2}(t) \sim \left(a^{h}V\tau_{1}^{1-\alpha}t^{\alpha}\right)^{1/(1+h)}, \ \zeta_{2} = r/R_{2}(t),$$
(4.42)

и свойства $g_2(\zeta)$ те же, что и у $g_1(\zeta)$. Как и в предыдущем интервале, облако примеси растет изотропно, и, учитывая $R_2 \propto t^{\alpha/(1+h)}$, в зависимости от значений α и hперенос в данном временном интервале может происходить как в режиме супер- так и суб-диффузии. Таким образом, несмотря на то, что миграция частиц по-прежнему определяется «длинными скачками», результирующим режимом может оказаться субдиффузия, поскольку доля времени, которое частицы проводят в остове, уменьшается с общим временем процесса достаточно быстро (частицы все большую часть времени проводят в ловушках).

Данный режим имеет место до тех пор, пока флуктуации скорости будут скоррелированы, или, иными словами, пока область, занимаемая примесью, будет меньше корреляционного радиуса ξ : $R_2(t) < \xi$. Отсюда следует выражение для верхней границы данного интервала времени, определяемое условием $R_2(\tau_2) \approx \xi$:

$$\tau_2 \approx \tau_1 \left(\frac{\xi^{1+h}}{a^h V \tau_1}\right)^{1/\alpha}.$$
(4.43)

Соотношение между временами τ_2 и τ , вообще говоря, заранее неизвестно, поскольку неизвестна функция $\tau(\xi)$. В настоящей работе мы полагаем $\tau_2 \ll \tau$, предполагая, что адвекция в остове (даже с учетом действия ловушек) является более быстрым процессом, чем диффузионный перенос по мертвым концам. Для последнего в силу фрактальной структуры мертвых концов режим будет заведомо субдиффузионным. Случай обратного соотношения между временами может быть также легко рассмотрен.

В следующем временном интервале, $\tau_2 \ll t \ll \tau$, размер облака примеси значительно превосходит корреляционный радиус. Учитывая, что основной вклад при вычислении функции Грина $G(\vec{r},t)$ (см. (4.40)) дают значения переменных $p \sim t^{-1}$, $k \sim r^{-1}$, интерес представляет поведение $G_{k,p}$, и M в диапазоне $k \ll \xi^{-1}$. Поскольку на расстояниях $r \gg \xi$ корреляторы скорости, и, следовательно, ядро потока убывают экспоненциально, для M можно приближенно написать

$$M\left(\vec{k},p\right) \approx -D_{\xi}k^{2}, \qquad (4.44)$$

где

$$D_{\xi} \sim \xi u , \qquad (4.45)$$

так что миграция частиц вдоль остова определяется некоррелированными скачками длиной порядка ξ . Кроме того, на данных временах существенный вклад в перенос оказывает дрейф примеси со средней скоростью **u**. В то же время поведение ловушек, по-прежнему, определяется зависимостью (4.22).

Вычисления с учетом (4.44) среднего смещения (4.13) и дисперсий (4.14)-(4.15) дает

$$\langle r_{\parallel} \rangle \sim R_{\parallel}(t) \sim R_{3}(t),$$
 (4.46)

$$R_3(t) \sim u \, \tau_1^{1-\alpha} t^{\alpha} \,,$$
 (4.47)

$$R_{\perp}(t) \sim \left(D_{\xi}\tau_1^{1-\alpha}t^{\alpha}\right)^{1/2}.$$
(4.48)

Функцию Грина

$$G(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p\varphi(p)+i\vec{k}\vec{u}+D_{\xi}k^2}$$
(4.49)

после интегрирования по волновому вектору можно представить как

$$G_{3}(\vec{r},t) = \frac{\tilde{N}(t)}{N_{0}} R_{\perp}(t)^{-2} R_{\parallel}(t)^{-1} \Phi(\vec{r},R_{\parallel}(t),\vec{n}), \qquad (4.50)$$

где **n** - единичный вектор в направлении средней скорости, а функция Ф есть

$$\Phi\left(\vec{r}, R_{\parallel}(t), \vec{n}\right) = \frac{\alpha \exp\left(-\frac{r}{2\xi}\left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r}\right)\right)}{8\pi^2} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \exp\left(s - \frac{r}{R_{\parallel}(t)}s^{\alpha}\right) \frac{ds}{s^{1-\alpha}}, \quad Reb > 0.$$
(4.51)

Из формул (4.47), (4.48) видно, что в силу 0 < α < 1 перенос в поперечном направлении происходит в режиме субдиффузии, в то время как в продольном направлении возможна как суб- так и супердиффузия.

На временах $t >> \tau(\xi)$ значения переменной Лапласа, определяющие основной вклад в поведение G, лежат в области $p << \tau(\xi)^{-1}$. На этих временах ловушки насыщаются, так что для $\varphi(p)$ имеем оценку

$$\varphi(p) \sim \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^{1-\alpha} \tag{4.52}$$

и перенос происходит в режиме классической адвекции-диффузии

$$G(\vec{r},t) \approx \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha} \left(4\pi \tilde{D}_{\xi}t\right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\left(\vec{r}-\vec{\tilde{u}}t\right)^2}{4\tilde{D}_{\xi}t}\right)$$
(4.53)

со средней скоростью

$$\vec{\tilde{u}} \approx \vec{u} \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha} \tag{4.54}$$

и эффективным коэффициентом диффузии

$$\tilde{D}_{\xi} \approx D_{\xi} \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha}.$$
(4.55)

Как следует из (4.53), полное количество активных частиц при этом уменьшается и определяется формулой:

$$N(t) \cong N_1 = N_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha}.$$
(4.56)

4.2 Анизотропный случай

Постановка задачи

Наличие выделенного направления, вдоль которого действуют движущие силы, будет приводить не только к появлению средней скорости, но и к возникновению анизотропии поля флуктуаций скорости, и, соответственно, к изменению вида корреляционных функций. Для описания переноса в этом случае соотношения скейлинга (4.16), (4.17) были обобщены (см. главу 3). В частности, теперь координатам вдоль и поперек выделенного направления должны быть приписаны различные масштабные размерности. Если ось O_Z направлена вдоль выделенного направления (например, вдоль вектора силы тяжести), то вместо (4.16) масштабное преобразование среды определяется соотношением (см. главу 3)

$$\{\vec{\rho}, z\} \to \{\lambda^{1/\beta} \vec{\rho}, \lambda z\}, \tag{4.57}$$

где $\vec{r} = \{\vec{\rho}, z\}, \quad \vec{\rho} = (x, y), \quad \text{так}$ что масштабные размерности пространственных координат имеют следующие значения

$$\Delta_z = 1, \quad \Delta_\mu = \frac{1}{\beta}. \tag{4.58}$$

Здесь μ принимает значения x и y, а параметр β , аналогично параметрам h и α определяется свойствами среды. Будем считать, что индекс -2h, по-прежнему, характеризует парный коррелятор флуктуации скорости, но теперь только zz-компоненту:

$$\Delta_{K^{(2)}} = -2h \,. \tag{4.59}$$

Масштабные индексы остальных компонент могут быть построены исходя из масштабных размерностей компонент скорости, соотношения между которыми, в свою очередь, следуют из условия несжимаемости (2.3). В итоге, например, для $\Delta_{\kappa^{(2)}}$ имеем

$$\Delta_{K^{(2)}_{\mu\mu}} = -2\left(h+1-\frac{1}{\beta}\right).$$
(4.60)

Основываясь на формулах (4.59), (4.60), диагональные компоненты парного коррелятора в области фрактальности представимы в виде (см. Главу 3)

$$K_{zz}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2h} \varphi\left(\frac{\rho^{\beta}}{z a^{\beta-1}}\right), \tag{4.61}$$

$$K_{\mu\mu}^{(2)}\left(\vec{r}\right) \cong V^{2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2(1/\beta-1-h)} \tilde{\varphi}\left(\frac{\rho^{\beta}}{za^{\beta-1}}\right), \tag{4.62}$$

где φ и $\tilde{\varphi}$ имеют асимптотики

$$\varphi(x \to 0) \to const, \varphi(x \to \infty) \sim x^{-2h}, \quad \tilde{\varphi}(x \to 0) \to const, \quad \tilde{\varphi}(x \to \infty) \sim x^{2(1+h-1/\beta)}.$$
 (4.63)

Аналогично строятся остальные компоненты корреляционной функции.

Область фрактальности в данном случае определяется двумя длинами корреляции ξ_{\parallel} и ξ_{\perp} , так что соотношения (4.61)-(4.63) действительны в области

$$a \ll z \ll \xi_{\parallel}, \quad a \ll \rho \ll \xi_{\perp}, \tag{4.64}$$

причем имеет место соотношение

$$\frac{\xi_{\parallel}}{a} \approx \left(\frac{\xi_{\perp}}{a}\right)^{\beta}.$$
(4.65)

Для средней скорости вдоль оси O_z , u, остается справедливым соотношение (4.20), в котором ξ заменяется на ξ_{\parallel} . Средняя скорость в поперечном направлении равна нулю.

Уравнение для средней концентрации сохраняет свой вид (4.2), однако, наличие выделенного направления приводит к появлению нового слагаемого, так что вместо (4.5) теперь имеем (глава 3)

$$j_{i} = -\int_{-\infty}^{t} dt' \int f_{ik} \left(\vec{r} - \vec{r}', t - t' \right) \frac{\partial \overline{c} \left(\vec{r}', t' \right)}{\partial r_{k}} d\vec{r} - \int_{-\infty}^{t} dt' \int f_{i} \left(\vec{r} - \vec{r}', t - t' \right) \frac{\partial \overline{c} \left(\vec{r}', t' \right)}{\partial t'} d\vec{r} + u_{i} \overline{c} .$$
(4.66)

Анизотропия поля скоростей никак не влияет на действие ловушек, поскольку миграция частиц в мертвых концах определяется диффузией и не связана с полем

скоростей адвекции. Поэтому вид оператора Q, описывающего действие ловушек (4.6), сохраняется.

Как и для квазиизотропного случая решается задача с начальными условиями (4.7).

Режимы переноса в анизотропном случае

Построение решения в данной задаче проводится аналогично, как и для изотропного случая. Поэтому далее мы лишь приведем полученные выражения для зависимости от времени размеров облака примеси и среднего смещения частиц, которые и определяют режим переноса в каждом временном диапазоне. Как и в главе 3, будут рассмотрены два случая: А) умеренной $(h < 1, \frac{1}{1+h} < \beta < \frac{2}{1+h})$ и Б) сильной (

 $h < 1, \beta > \frac{2}{1+h}$) анизотропии.

А) Умеренная анизотропия,
$$h < 1, \frac{1}{1+h} < \beta < \frac{2}{1+h}$$

На малых временах $\tau_0 \ll t \ll \tau_1$ перенос определяется случайной адвекцией, и влиянием ловушек можно пренебречь. Для продольной координаты размер облака примеси описывается формулой (4.34) ($R_{\parallel}(t) = R_1(t)$). Для размера в поперечном направлении, с учетом введенной масштабной размерности (4.58), имеем

$$R_{\perp}(t) = \left(a^{\beta(1+h)-1}Vt\right)^{1/\beta(1+h)}.$$
(4.67)

Таким образом, облако примеси растет по супердиффузионной зависимости в обоих направлениях. Кроме того, в отличие от изотропного случая, в данном временном интервале существенным является среднее смещение частиц примеси, которое по порядку равно размеру облака в продольном направлении

$$\langle z \rangle \sim R_1(t)$$
. (4.68)

В следующем диапазоне $\tau_1 \ll t \ll \tilde{\tau}_2$ вступают в действие ловушки, так что для продольного размера облака примеси справедливо $R_{\parallel}(t) = R_2(t)$ (см. (4.42)), а для размера в поперечном направлении

$$R_{\perp} \approx \left(V a^{\beta(1+h)-1} \tau_1^{1-\alpha} t^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta(1+h)}}.$$

$$(4.69)$$

Среднее смещение частиц определяется формулой

$$\langle z \rangle \sim R_2(t).$$
 (4.70)

В зависимости от соотношения между h, β и α . Режим может быть как суб- так и супердиффузионный, причем в продольном и поперечном направлениях они могут различаться качественно, например, супер- в продольном и суб- в поперечном (и наоборот!).

Для верхней границы интервала имеем

$$\tilde{\tau}_2 = \tau_1 \left(\frac{\xi_{\parallel}^{1+h}}{Va^h \tau_1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$
(4.71)

В диапазоне $\tilde{\tau}_2 \ll t \ll \tau$ размеры облака примеси превышают корреляционный радиус, но ловушки еще не насыщены. В итоге, для среднего смещения и размера облака в продольном направлении справедливы соотношения (4.46)-(4.47), а для поперечного размера – (4.48), в котором D_{ξ} следует заменить на

$$D_{\xi\perp} \sim \xi_{\perp}^2 \tilde{\tau}_2^{-1} \tag{4.72}$$

Таким образом, расплывание облака происходит анизотропно, причем в поперечном направлении медленнее, чем по классической диффузии, а среднее смещение растет медленнее, чем по линейному со временем закону.

В диапазоне $t >> \tau$ ловушки насыщаются, и реализуется классическая адвекциядиффузия с полным числом активных частиц N_1 , модифицированной скоростью \vec{u} и анизотропной диффузией, так что эффективные коэффициенты диффузии описываются формулами

$$\tilde{D}_{\xi\nu} = D_{\xi\nu} \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^{1-\alpha}, \quad \nu = \parallel, \perp.$$
(4.73)

где

$$D_{\xi\parallel} \sim \xi_{\parallel} u \,, \tag{4.74}$$

а $D_{\xi\perp}$ определяется формулой (4.72).

Б) Сильная анизотропия,
$$h < 1, \beta > \frac{2}{1+h}$$

На малых временах $\tau_0 \ll t \ll \tau_1$ режим переноса был описан в главе 3 и представляет собой супердиффузию в продольном направлении $R_{\parallel}(t) = R_1(t)$, со средним смещением $\langle z \rangle \sim R_1(t)$, и классическую диффузию в поперечном направлении

$$R_{\perp}(t) = \sqrt{\tilde{D}t}, \quad \tilde{D} \sim Va \tag{4.75}$$

В следующем диапазоне $\tau_1 << t << \tilde{\tau}_2$ действие ловушек приводит к режиму, для которого справедливы соотношения $\langle z \rangle = R_{\parallel}(t) = R_2(t)$ и

$$R_{\perp} \approx \sqrt{\tilde{D}\tau_1 \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\alpha}} \,. \tag{4.76}$$

В диапазоне $\tilde{\tau}_2 << t << \tau$ перенос в продольном направлении описывается формулами (4.46)-(4.47), а в поперечном – (4.76).

В диапазоне $t >> \tau$ режимом переноса является адвекция диффузия с полным числом активных частиц N_1 , скоростью дрейфа \vec{u} и эффективными коэффициентами диффузии $D_{\xi\parallel}$ в продольном и \tilde{D} поперечном направлениях.

4.3 Обсуждение

В данной главе описана модель и проанализированы режимы переноса примеси, обусловленные адвекцией и диффузией в перколяционной среде с конечной длиной корреляции. Показано, что при учете ловушек, внутренне присущих перколяционным средам, возникают четыре временных интервала, в каждом из которых особые свойства перколяционной среды проявляются по-своему.

В первом временном интервале основную роль играет пространственное самоподобие системы хорошо проводящих каналов (остова перколяционного кластера). Для случая адвекции в поле скоростей просачивающейся по данным каналам жидкости, свойство самоподобия приводит к медленному пространственному убыванию

коррелятора флуктуаций скорости. В результате, при значениях показателя степени убывания коррелятора *h* < 1, перенос примеси происходит в режиме супердиффузии.

В следующем временном интервале начинают действовать ловушки, обусловленные диффузией примеси в мертвые концы перколяционных кластеров. При этом происходит замедление переноса, так что супердиффузионный режим может смениться субдиффузионным.

На временах, когда размер облака примеси существенно превосходит корреляционный радиус среды, но ловушки еще не насыщены, режим переноса формируется под влиянием следующих факторов: дрейфа со средней скоростью, случайных скачков с длиной скачка порядка корреляционного радиуса, и постепенным уменьшением доли времени, проводимого частицами в остове. Последнее обусловлено блужданием примеси в мертвых концах (в ловушках). В итоге в направлении средней скорости адвекции среднее смещение частиц оказывается порядка корня из дисперсии и может описываться как суб, так и супердиффузионной закономерностью. В направлении перпендикулярной к средней скорости устанавливается субдиффузионный режим переноса.

На последней стадии ловушки насыщаются, и режимом переноса становится классическая адвекция-диффузия. Полное число активных частиц и скорость среднего смещения уменьшаются (в одинаковое число раз). Значительная же часть примеси остается сосредоточенной в ловушках и в процессе переноса не участвует. Эффективные коэффициенты диффузии определяются как величиной корреляционной длины, так и временем насыщения ловушек.

В работе получены выражения, описывающие указанные режимы как для случая, когда распределение флуктуаций скорости изотропно, так и для анизотропного распределения.

Наличие двух этапов при переходе от самоподобного к статистически однородному поведению системы аналогична ситуации, которая возникает в статистически однородных двупористых средах (см. следующую главу), в которых системы каналов с высокой проницаемостью обеспечивают быстрый адвекционный перенос на большие расстояния, в то время как слабо-проницаемые области играют роль ловушек. При определенном соотношении между параметрами, здесь также возможно сохранение неравновесия в слабопроницаемой подсистеме и на временах,

когда размеры облака примеси будут значительно превосходить размеры неоднородностей. Окончательный режим в этом случае устанавливается только после насыщения ловушек примесью.

Представляет интерес рассмотреть вопрос, насколько полученное усредненное описание будет соответствовать транспорту реального облака частиц, вброшенных в среду при какой-то конкретной реализации течения. У данного вопроса есть два аспекта.

Первый касается задания начальных данных. Дело в том, что когда мы рассматривали перенос по перколяционной среде, мы неявно полагали, что в начальный момент времени примесь находится в остове перколяционного кластера, так что с самого начала перенос примеси определяется адвекцией в поле скоростей просачивающейся по (bb) жидкости. При рассмотрении единичного эксперимента может оказаться, что изначально сгусток примеси окажется локализованным в мертвом конце. Тогда для того, чтобы примесь попала в остов, ей необходимо продиффундировать до того места, где мертвый коней присоединяется к остову. Можно сказать, что возникает диффузионный барьер, который приведет к эффективной перенормировке источника. Данный вопрос рассматривался для различного типа сред [62]. Для сред с фрактальной геометрией он еще нуждается в доработке.

Второй вопрос – это соответствие между формулами, даваемыми моделью, и реальным распределением частиц в конкретном эксперименте. В последнем случае распределение частиц в пространстве будет локализовано внутри каналов, формирующих перколяционный кластер. Поэтому вместо монотонного расплывания облака будет наблюдаться формирование структур и кластеров примеси. Попытка усреднить концентрацию по пространству не приводит к успеху, поскольку, как известно, доля пространства, занимаемая перколяционным кластером, на масштабах меньших корреляционной длины ξ зависит от размера области усреднения (перколяционный кластер обладает фрактальной размерностью). В этом случае сравнении теории с экспериментом должны проводиться для моментов распределений концентрации, определяемых в теории и наблюдаемых на эксперименте (среднее смещение (4.13), дисперсия (4.14), (4.15).

Что касается непосредственного сравнения распределений концентрации, то данный вопрос – это вопрос о степени неопределенности предсказаний модели, опирающейся на свойства среды, усредненные по ансамблю реализаций [63]. Действительно, формирование перколяционного кластера, который в нашем случае определяет конкретную реализацию распределения проницаемости и, следовательно, поля скоростей есть случайный процесс. Входящая в выражение (3) функции Грина *G* есть результат усреднения точной функции Грина $\hat{G}(\vec{r_1}, \vec{r_2}; t)$ для конкретной реализации фрактальной (и, следовательно, неоднородной) среды, являющейся решением уравнения (4.1):

$$G(\vec{r},t) = \left\langle \hat{G}\left(\vec{r}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, \vec{r}_0 - \frac{\vec{r}}{2}; t\right) \right\rangle$$

где запись $\langle ... \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю реализаций среды. Степень неопределенности модели определяется статистическим разбросом, который происходит из-за пространственных флуктуаций указанных характеристик среды (прежде всего, проницаемости) и обусловлен формально статистической неопределенности величины \hat{G} . Соответствующий статистический разброс \hat{G} (и, следовательно, концентрации примеси) определяется соотношением

$$\Delta = \frac{\sqrt{\langle \delta \hat{G}^2 \rangle}}{G}, \, \text{где } \delta \hat{G} = \hat{G} - G \,.$$
(4.77)

Предположим сначала, что размер области локализации примеси (облака примеси) велик в сравнении с длиной корреляции $R(t) >> \xi$. В этом случае среду можно считать статистически однородной, и в соответствии с эргодической гипотезой усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по пространству. В частности, будем иметь:

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{V} \int_{V} d^{3}r_{0} < \hat{G}\left(\vec{r}_{0} + \frac{\vec{r}}{2}, \vec{r}_{0} - \frac{\vec{r}}{2}; t\right) >$$
(4.78)

Объем V, по которому происходит усреднение, удовлетворяет неравенству:

$$\xi^3 \ll V \ll R^3(t) \tag{4.79}$$

Тогда основной вклад при вычислении числителя под знаком корня в формуле (4.77) возникает от интегрирования произведения $\delta \hat{G}(r_{01}) \delta \hat{G}(r_{02})$ по области $|r_{01} - r_{02}| \leq \xi$, так что с учетом того, что в сильно неоднородной фрактальной среде масштаб флуктуаций $\delta \hat{G}$ порядка самой *G*, имеем

$$\left< \delta \hat{G}^2 \right> \sim \int_{|r_{01}-r_{02}| \leq \xi} d^3 r_{01} d^3 r_{02} \delta \hat{G}(r_{01}) \delta \hat{G}(r_{02}) \sim \frac{\xi^3}{V} G^2.$$

Подставляя эту оценку в соотношение (18), получаем, что относительный статистический разброс концентрации примеси за счет пространственных флуктуаций характеристик среды на временах, когда $R(t) >> \xi$, можно оценить как

$$\Delta \le \left(\frac{\xi}{R(t)}\right)^{3/2} \tag{4.80}$$

При $R(t) >> \xi$ данная величина мала, и модель будет описывать результаты эксперимента с хорошей точностью (после соответствующего усреднения наблюдаемой концентрации). По мере уменьшения размера облака примеси статистический разброс концентрации примеси растет, и в том случае, когда данный размер оказывается сравнимым с длиной корреляции, величина статистического разброса становится порядка единицы

$$\Delta \sim 1$$
, при $R(t) \sim \xi$. (4.81)

Таким образом, можно утверждать, что полученные в рамках предложенной модели формулы с хорошей точностью описывают поведение примеси в единичном эксперименте на временах, когда размер облака примеси сравним либо много больше корреляционной длины. Ha меньших временах результаты модели будут воспроизводиться после усреднения результатов единичных экспериментов по достаточно большому числу реализаций среды. Вопрос 0 статистической неопределенности результатов модели в данном интервале времени нуждается в дополнительном исследовании.

Отметим, также, что в литературе существуют модели, в которых для эффективного описания сред с фрактальными свойствами для относительной диффузии (в нашем случае – дисперсии) используется явная зависимость от пространственных либо временных координат (см., например, [64]). Однако, данный способ вызывает определенные трудности при рассмотрении случаев с распределенным источником (например, начальное распределение не сводится к дельта-функции). В рамках нашей модели вопрос о распределенных источниках по пространству решается формулой (4.8)

В случае же когда речь идет об описании миграции отдельных частиц, то введение явной зависимости коэффициента диффузии от пространственных и временных координат эквивалентно представленным в работе формулам. Например, формулу (4.34) можно представить в виде $R_1 \sim \sqrt{D(t)t}$, где $D(t) = (a^h V)^{\frac{2}{1+h}} t^{\frac{1-h}{1+h}}$, либо $R_1 \sim \sqrt{D(R)t}$, где $D(R) = a^h V R^{1-h}$.

Также в заключение коснемся вопроса о происхождении перколяционных кластеров в геологических средах. Как уже указывалось, такие кластеры могут формироваться как результат специфического распределения трещин в трещиноватых скалах [45]. Однако, формирование путей просачивания жидкости в виде перколяционных кластеров может быть следствием сильного разброса в значениях проницаемости в изначально статистически однородной среде (например в пористой среде с широким распределением пор по размерам) [10]. Для частично насыщенных сред механизмом, приводящим к формированию перколяционного кластера, объединяющего насыщенные влагой области, может являться поверхностное натяжение жидкости [65].

ГЛАВА 5

СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ДВУПОРИСТЫЕ СРЕДЫ

Перейдем теперь к описанию переноса в статистически однородных двупористых средах (третий тип, из перечисленных во введении). Их можно характеризовать следующим образом. В средах этого типа каналы для транспорта примеси на большие расстояния образованы семейством пор достаточно крупных размеров. Пространство между данными каналами заполнено пористой средой, но с порами существенно более мелкими. На рисунке 5.1 схематически изображен пример такой среды.



Рис. 5.1. Схематическое изображение двупористой среды.

Обозначим средний размер крупных пор как *a*, и средний размер пористых блоков как *b*. Поскольку проницаемость системы пор пропорционально (грубо) квадрату их радиуса, то проницаемость системы крупных пор значительно превосходит проницаемость системы мелких. В итоге течение грунтовых вод (а, следовательно, и адвективный перенос растворенной примеси) будет определяться именно крупными порами, а внутри пористых блоков течением можно пренебречь. Однако, поскольку пористые блоки также насыщенны влагой, примесь может диффундировать в них.

Таким образом, перенос на большие расстояния будет также определяться и обменом между системой крупных пор и пористыми блоками (аналогично тому, как это было в регулярно неоднородных средах главы 1).

Примерами реализации среды с такими свойствами могут являться не только пористые среды с бимодальным распределением пор по размерам, но и трещиноватопористые среды, в которых сетки трещин играют роль системы крупных пор, а также геологические формации состоящие из смеси хорошо проницаемых (например, песков) и слабопроницаемых компонент (например, глин).

Появление неклассических режимов переноса для данного типа сред может показаться с первого взгляда неожиданным. Действительно, касаясь причины возникновения аномальных режимов переноса в предыдущих случаях (регулярно неоднородных и фрактальных сред), можно утверждать, что для обоих типов сред данной причиной являлась невозможность ввести усредненные характеристики для распределения неоднородностей. Именно, для обоих типов сред объемная доля «быстрых» каналов уменьшалась с увеличением масштаба усреднения. В статистически однородных двупористых средах мы можем провести такое усреднение. Для этого достаточно усреднять на масштабах больше b. В итоге мы получим среду с эффективными проницаемостью и пористостью, для которой должен реализоваться классический режим адвекции-диффузии (или адвекции-дисперсии). Однако, как показывают многочисленные исследования, это не так и очень часто здесь также наблюдаются режимы, для которых среднее смещение $\langle \vec{r} \rangle$ и дисперсия частиц $\sigma(t)$ зависят от времени как t^{γ} , где $\gamma < 1$ для $\langle \vec{r} \rangle$, и $\gamma \neq 1/2$ для $\sigma(t)$.

Дело в том, что даже если размер облака примеси существенно превосходит размеры неоднородностей b (и среда выглядит как однородная), тем не менее, возможна ситуация, когда в системе отсутствует равновесие. Именно, как и в случае регулярно неоднородных сред, частицы примеси проводят в «быстрой» подсистеме (в системе хорошо проницаемых каналов, по которым перенос примеси происходит по механизму адвекции) только часть общего времени. И как следствие этого, перенос по быстрой подсистеме определяется как характеристиками этой подсистемы (средней скоростью адвекции, коэффициентом дисперсии), так и долей времени, проведенной примесью в этой подсистеме.

Впервые проблема переноса в таких средах возникла в хроматографии [66], и в настоящее время она представляет значительный интерес для описания переноса загрязнений в геологических формациях. Простейшие модели двойной пористости (или проницаемости) состоят в следующем [38, 39]. Среда миграции двойной представляется как суперпозиция двух взаимно проникающих областей, каждая из все пространство И обладает которых занимает своими собственными гидрологическими и транспортными свойствами и пористостью. Перенос на далекие расстояния определяется адвекцией по хорошо проницаемой подсистеме, в то время как слабопроницаемая подсистема играет роль ловушки. В простейшем случае рассматривают ситуацию, в которой на временах, когда размер облака примеси превосходит масштабы неоднородностей (что и представляет практический интерес), примесь в первой и второй подсистемах находятся в равновесии. В этом случае режимом переноса остается классическая адвекция-диффузия, но с перенормированными транспортными коэффициентами (средней скоростью адвекции \tilde{u} и коэффициентом дисперсии \tilde{D}). Именно, если в отсутствие взаимодействия со второй пористостью указанные величины определяются коэффициентами и и D, соответственно, то в результате взаимодействия новые величины \tilde{u} и \tilde{D} определяются как

$$\tilde{u} = \frac{u}{K}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{K} \tag{5.1}$$

где коэффициент K есть отношение полной концентрации к ее активной части. Часто это приближение используется для описания переноса в пористых средах с сорбцией (равновесная модель сорбции). В этом случае K носит название коэффициента задержки (см., например, [67]).

Легко показать, что даже на больших временах, когда размер облака примеси существенно превосходит геометрические размеры неоднородностей, равновесие в распределении примеси между подсистемами и внутри второй подсистемы (в ловушках) может не достигаться. Действительно, время установления равновесия внутри каналов первой подсистемы есть характерное время диффузии на масштабе порядка апертуры каналов 2*a*. При *a* ~ 1 μm и коэффициенте молекулярной диффузии в растворе $d_m \sim 10^{-6}$ см²/сек, имеем $\tau \approx a^2/d_m \sim 10^{-2}$ сек, что пренебрежимо мало в большинстве случаев. Время установления равновесного распределения концентрации

во второй подсистеме (а, следовательно, и между подсистемами) по порядку есть $\tilde{\tau} \approx b^2/\tilde{d}_m$, где \tilde{d}_m есть эффективный коэффициент диффузии примеси в блоках. Обычно $d_m \ll \tilde{d}_m$, что является следствием сложной, извилистой структуры каналов, по которым диффундирует растворенная примесь внутри блоков. Характерные размеры блоков могут варьироваться в широких интервалах [45]. Если в качестве примера взять $b \sim 10$ см, $\tilde{d}_m \sim 10^{-8}$ см²/сек, то время установления равновесия получается порядка $\tilde{\tau} \sim 10^{10} cek \approx 300$ лет. Откуда следует, что в широком временном диапазоне равновесное приближение для обмена примесью между подсистемами нельзя считать обоснованным.

Для учета указанной неравновесности был предложен ряд моделей, целью которых было определение функции, описывающей обмен примесью между подсистемами. Опять-таки, в простейшем случае данная функция представлялась в виде разности средних концентраций примеси (в первой и второй подсистемах), умноженной на константу с размерностью обратного времени [38]. В более сложных моделях была предпринята попытка учесть зависящее от времени распределение примеси внутри блоков. Вводилась так называемая функция памяти. Некоторые представления для этой функции были получены на основе прямого решения диффузионной задачи для блоков стандартной формы (плоской, цилиндрической, сферической). При другом подходе вид функции памяти выбирался исходя из общего представления в виде степенной функции [68]. В работах [69, 70] были предложены модели, в которых обмен между подсистемами описывался суммой обменных слагаемых с целым набором характерных времен. При этом реализация обмена с тем или иным характерным временем определялась функцией распределения вероятности, которая в свою очередь должна была определяться из эксперимента [71]. Следует отметить, что анализ возможных режимов переноса, в данных моделях не проводился.

Целью настоящей главы является построение неравновесной модели переноса в двупористых средах, учитывающей динамику обмена примесью между подсистемами, и на базе этой модели анализ режимов переноса примеси в статистически однородной двупористой среде.

Далее в разделе 2 содержится постановка задачи и выписаны основные соотношения. Раздел 3 посвящен описанию режимов переноса. Основные выводы и сравнение со стандартной равновесной моделью приведены в Заключении.

5.1 Основные уравнения и функция памяти

Рассматриваемая среда имеет вид, схематически изображенный на рисунке 5.1. В дальнейшем для удобства мы будем называть хорошо проницаемую систему пор системой трещин. Рассматриваем случай, когда и система трещин, и пористость блоков насыщены влагой. Перенос примеси внутри системы трещин описывается классическим уравнением адвекции-диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div \left(\vec{v}c - D_m \vec{\nabla}c \right) = 0, \qquad (5.2)$$

где *с* есть концентрация примеси в растворе в трещинах, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$ локальная скорость течения в трещинах.

После стандартного усреднения уравнения (5.2) по пространству на масштабах много больше характерного размера блоков *b* (Рис. 5.1), получаем (см., например, [67])

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + div \left(\vec{u} \,\overline{c} - D \,\vec{\nabla} \,\overline{c} \,\right) = -Q \,, \tag{5.3}$$

где

$$\overline{c} = V^{-1} \int_{V} c d^{3} r \,,$$

V - объем усреднения ($V >> b^3$), \vec{u} есть средняя скорость просачивания, D есть коэффициент (в общем случае, тензор) дисперсии, а Q - плотность стока частиц примеси из раствора внутри трещин в блоки в пересчете на единицу объема.

Коэффициент дисперсии D содержит две части, одна из которых определяется вкладом молекулярной диффузии d_m , а вторая – флуктуирующим гидродинамическим переносом [72]. Согласно результатам экспериментальных данных, компилированных в работе [73], $D \sim d_m$ при $Pe \leq 1$, а при Pe >> 1, $D \sim d_m Pe$, где число Пекле есть $Pe = \frac{bu}{d_m}$. Учитывая, что миграция примеси на большие расстояния определяется переносом по системе трещин, ниже примесь в трещинах \overline{c} , мы называем активной примесью.

Решается задача с начальным условием

$$\overline{c}\left(\vec{r},t=0\right) = \overline{c}^{(0)}\left(\vec{r}\right).$$
(5.4)

Как и в предыдущих главах, далее нам удобно перейти в представление Фурье-Лапласа. В данном представлении уравнение (5.3) принимает вид

$$\left(p + i\vec{k}\vec{u} + Dk^2\right)\overline{c}_{p,\vec{k}} = -Q_{p,\vec{k}} + \overline{c}_{\vec{k}}^{(0)},$$
(5.5)

где $\overline{c}_{\vec{k}}^0$ есть Фурье образ начального распределения примеси $\overline{c}^{(0)}(\vec{r})$.

В силу линейности задачи связь между $Q_{p,\vec{k}}$ и $\vec{c}_{p,\vec{k}}$ также должна быть линейной. Кроме того, считаем, что поступление примеси в блоки происходит только из раствора в трещинах, то есть блоки не обмениваются примесью непосредственно друг с другом. В общем случае это, конечно, не так, так как между пористыми блоками остаются перемычки. Однако, если перенос по трещинам определяется адвекцией, вклад диффузионного переноса примеси по этим перемычкам в общий транспорт на большие расстояния оказывается не существенным.

В итоге, имеем

$$Q_{p,\vec{k}} = \Lambda(p) \cdot \overline{c}_{p,\vec{k}}, \qquad (5.6)$$

где функция $\Lambda(p)$ часто носит название функции памяти. Ее вид будет определен ниже.

Из уравнения (5.5) и выражения (5.6) для концентрации активной примеси в Фурье-Лаплас представлении следует

$$\overline{c}_{p\vec{k}} = \frac{\overline{c}_{\vec{k}}^{(0)}}{p + \Lambda(p) + i\vec{k}\vec{u} + Dk^2},$$
(5.7)

С помощью обратного Фурье-Лаплас преобразования $\overline{c}_{p\vec{k}}$ находим

$$\overline{c}(t,r) = \int d^{3}\vec{r}' G(t,\vec{r}-\vec{r}')\overline{c}^{(0)}(\vec{r}'), \qquad (5.8)$$

где функция Грина $G(t, \vec{r})$ после интегрирования по волновому вектору определяется выражением

$$G(t,\vec{r}) = \frac{\exp\left(\frac{\vec{u}\vec{r}}{2D}\right)}{4\pi Dr} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp\left(-\Phi\left(p;t,r\right)\right), \ \operatorname{Re}l > 0, \ r = \left|\vec{r}\right|, \tag{5.9}$$

$$\Phi(p;t,r) = \frac{ur}{2D}\sqrt{1 + t_u(p + \Lambda(p))} - pt, \qquad (5.10)$$

и введено характерное время

$$t_u = \frac{4D}{u^2}.\tag{5.11}$$

Определение функции памяти

Для определения $\Lambda(p)$ необходимо вычислить поток примеси на отдельный блок.

Уравнение для концентрации примеси *n* в поровом растворе внутри блока имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = d_m \Delta n . \tag{5.12}$$

Усредняя уравнение (5.12) по пространству внутри блока (на масштабах много больше размеров пор, но много меньше b) и учитывая, что для концентрации примеси в растворе \overline{n} применимо приближение равновесной сорбции, получаем уравнение

$$\frac{\partial \overline{n}}{\partial t} = d\Delta \overline{n} , \qquad (5.13)$$

где эффективный коэффициент диффузии *d* учитывает свойства среды блоков (пористость, искривленность путей миграции).

В начальный момент времени примеси в блоках нет

$$\overline{n}(r,t=0) = 0. \tag{5.14}$$

Условие на границе блока (с учетом того, что \overline{c} есть концентрация активных частиц усредненная на масштабах много больших b) имеет вид

$$\overline{n}\Big|_{Bound} = A\overline{c} \tag{5.15}$$

где

$$A = \varphi_b / \varphi_{fr} \,. \tag{5.16}$$

Здесь φ_b есть величина пористости в блоках, а φ_{fr} - удельная доля объема, занимаемого трещинами.

Поток примеси из пространства внутри трещин на один блок определяется выражением

$$q = -d \oint_{S_b} \vec{\nabla} \vec{n} d\vec{S} , \qquad (5.17)$$

где интегрирование производится по поверхности блока S_b . Вводя объем, приходящийся на один блок V_b , для плотности стоков в уравнении (5.3) имеем выражение

$$Q = \frac{q}{V_b},\tag{5.18}$$

которое, согласно (5.5) и определит функцию Л.

Найдем выражения для $\Lambda(p)$ в двух предельных случаях больших и малых p. Для этого заметим, что режим переноса примеси внутри блока существенно различается на больших и малых временах.

На временах $t \ll t_b$, где

$$t_b = \left(\frac{V_b}{S_b}\right)^2 \frac{1}{d},\tag{5.19}$$

примесь, ушедшая в блок, занимает лишь узкий слой вблизи поверхности блока. В этом случае задачу диффузии примеси в блок можно рассматривать как одномерную. Тогда выбирая систему координат с осью *Ох* направленной вглубь блока по нормали к границе с началом на его поверхности, в представлении Лапласа уравнение (5.13) принимает вид

$$\frac{p}{d}\overline{n} = \frac{\partial^2 \overline{n}}{\partial x^2},$$
(5.20)

Решение, убывающее при $x \to \infty$, с учетом граничного условия (5.15) имеет вид

$$\overline{n} = A\overline{c} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{d}}x\right),\tag{5.21}$$

Подставляя (5.21) в выражение (5.17) и затем в (5.18), получаем

$$Q_{p,\vec{k}} \cong \sqrt{\frac{p}{t_a}} \,\overline{c}_{p,\vec{k}} \,, \tag{5.22}$$

где введено новое характерное время

$$t_a = \left(\frac{V_b}{S_b A}\right)^2 \frac{1}{d}.$$
(5.23)

В итоге, замечая, что интервал $t \ll t_b$ соответствует значениям переменной Лапласа $p \gg t_b^{-1}$, с учетом (5.6) для функции $\Lambda(p)$ имеем

$$\Lambda(p) \approx \sqrt{\frac{p}{t_a}},$$
 при $pt_b >> 1.$ (5.24)

Перейдем к временам $\underline{t} >> t_b$. Удобно выделить в уравнении (5.13) малый параметр. Для этого обезразмерим пространственную координату на величину $\tilde{b} = V_b/S_b$, которая приблизительно равна характерному размеру блока: $\vec{r} \rightarrow \vec{\tilde{r}} = \vec{r}/\tilde{b}$, так что уравнение (5.13) примет вид

$$\alpha \overline{n} = \tilde{\Delta} \overline{n} , \qquad (5.25)$$

где $\alpha = pt_b <<1$, и абсолютные значения новых координат меняются в интервале порядка единицы. На рассматриваемых временах примесь в блоках распределена практически однородно, причем $\overline{n} = A\overline{c}$ на границе блока, и $\overline{n} < A\overline{c}$ внутри блока. Тогда мы можем представить \overline{n} в виде

$$\overline{n} = A\overline{c}\left(1 - f\left(\overline{\tilde{r}}\right)\right),\tag{5.26}$$

где $f(\vec{r}) = 0$ на границе блока и $f(\vec{r}) > 0$ внутри блока. Поскольку в уравнении (5.25) имеется малый параметр, будем искать решение в виде ряда теории возмущений. С точностью до членов первого порядка малости имеем $f(\vec{r}) \approx \alpha f_1(\vec{r})$, где f_1 удовлетворяет условиям: $\tilde{\Delta} f_1 = -1$ внутри блока, и $f_1 = 0$ на его границе. Переходя в (5.17) от поверхностного интеграла к объемному, воспользовавшись уравнением (5.25) и выражением (5.18), получаем для плотности стоков следующее соотношение

$$Q \cong \frac{d\alpha A}{V_b b^2} \left\{ \int_{V_b} dV - \alpha \int_{V_b} f_1(\vec{\tilde{r}}) dV \right\} \overline{c} , \qquad (5.27)$$

откуда с учетом (5.6) для $\Lambda(p)$ получаем

$$\Lambda(p) \approx p \sqrt{\frac{t_b}{t_a}} (1 - Bpt_b), \text{ при } pt_b \ll 1.$$
(5.28)

где В - множитель порядка единицы, зависящий от формы блока.

Введенные времена (5.19) и (5.23) имеют следующий смысл. Параметр t_a характеризует время, когда количество примеси, ушедшей в блок, сравнивается с количеством примеси в трещине, а параметр t_b есть время установления равновесия между примесью в трещинах и блоках. В настоящей работе мы полагаем

$$t_b >> t_a \,. \tag{5.29}$$

Как обычно, режим переноса определяется средним смещением центра масс облака примеси $\langle \vec{r} \rangle$ и дисперсией примеси $\sigma(t)$:

$$\left\langle \vec{r} \right\rangle = \frac{1}{N(t)} \int d^{3}\vec{r} \, \vec{r} \, \vec{c}(t, \vec{r}), \tag{5.30}$$

$$[\sigma(t)]^2 = \frac{1}{N(t)} \int d^3 \vec{r} \left(\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle\right)^2 \bar{c}(t, \vec{r}), \qquad (5.31)$$

где $N(t) = \int d^3 \vec{r} \, \vec{c}(t, \vec{r})$ есть полное число активных частиц примеси в момент времени t.

Далее мы будем рассматривать перенос примеси на временах, когда $\sigma(t) >> \sigma_0$, где $\sigma_0 = \sigma(t=0)$. Поэтому, согласно уравнению (5.8) для концентрации активных частиц справедливо следующее выражение:

$$\overline{c}(t, \vec{r}) = N_0 G(t, \vec{r}). \tag{5.32}$$

Полное число активных частиц примеси выражается через нулевую Фурьегармонику функции Грина:

$$N(t) = \int \frac{dp}{2\pi i} G_{p,\vec{k}|\vec{k}=0} \exp(pt).$$
 (5.33)

Выражения (5.9), (5.10) во многом аналогичны выражениям, полученным в задачах о миграции примеси в гребешковых структурах [37] и в резко-контрастных средах в рамках модели Дыхне (см. Главу 1). Поэтому в дальнейшем анализе мы будем следовать методу, развитому в указанных работах.

5.2 Режимы переноса и асимптотическое поведение концентрации

Поведение функции Грина и структура асимптотики концентрации зависят от соотношения между характерными временами t_u , t_a и t_b . Проанализируем поведение для различных случаев.

Как обычно, считаем, что в основном облаке главный вклад в интеграл (5.9) определяется значениями переменной Лапласа, удовлетворяющими соотношению $pt \sim 1$, а в асимптотиках концентрации – pt > 1.

(1) $\underline{t_u} \ll \underline{t_a}.$

(1.1) $t \ll t_u$. В этом интервале мы можем перейти к пределу $u \to 0, t_a \to \infty$. Поэтому здесь функция Грина принимает вид, соответствующий известному выражению классической диффузии:

$$G(\vec{\rho},t) \cong \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right).$$
 (5.34)

(1.2) $t_u \ll t \ll t_b$. В основном облаке имеем $t_b^{-1} \ll p \ll t_u^{-1}$, и при интегрировании выражения (5.9) можем использовать следующее разложение функции $\Phi(p;t,r)$:

$$\Phi(p;t,r) = \frac{ru}{2D} + \frac{r}{u} \left(\sqrt{\frac{p}{t_a}} - \frac{t_u}{4}p^2\right) - pt'$$
(5.35)

где t' = t - r/u.

Как следует из дальнейших вычислений, поведение функции Грина существенно различается на временах меньших и больших характерного времени $t_* = (t_u t_a^2)^{1/3}$.

(1.2.а) $t_u \ll t \ll t_*$. Во-первых, рассмотрим поведение концентрации в основном облаке примеси. Предположим, что в данном интервале времени слагаемым пропорциональным \sqrt{p} в формуле (5.35) можно пренебречь. Тогда вычисление интеграла (5.9) приводит к следующему выражению

$$G(\vec{\rho},t) \cong \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{u}t)^2}{4Dt}\right).$$
 (5.36)

При вычислении интеграла, вблизи пика концентрации, $\vec{r} \approx \vec{u}t$, характерные значения p, дающие основной вклад при интегрировании выражения (5.9) имеют вид $p \sim (t_u t)^{-1/2}$. Откуда следует оценка слагаемого пропорционального \sqrt{p} в выражении (5.35):

$$\frac{r}{u}\sqrt{\frac{p}{t_a}} \sim \left(\frac{r}{ut_*}\right)^{3/4}.$$
(5.37)

Поскольку в области основного облака пространственная переменная удовлетворяет неравенству $r \le ut$, то из (5.37) следует оценка

$$\frac{r}{u}\sqrt{\frac{p}{t_a}} \le \left(\frac{r}{ut_*}\right)^{3/4} <<1,$$

которое подтверждает сделанное выше предположение.

Таким образом, перенос основной массы примеси, описываемый (5.36), происходит в режиме трехмерной классической адвекции-диффузии. Среднее смещение частиц и дисперсия равны, соответственно, $\langle \vec{r} \rangle = \vec{u}t$ и $\sigma = \sqrt{4Dt}$.

Выражение (5.36) справедливо там, где экспонента не слишком мала по сравнению с единицей. В далеких крыльях функции $G(t, \vec{r})$ (в асимптотиках) при интегрировании в формуле следует воспользоваться методом перевала. В соответствии с уравнением $\partial \Phi(p; \vec{r}, t) / \partial p \Big|_{p=p_0} = 0$ находим перевальную точку $p_0 \approx -2t'/t_u t$. Поскольку величина p_0 вещественна и имеет знак противоположный знаку t',

поведение в крыльях различно впереди и за пиком основного облака. В далеком переднем крыле (t' < 0) остается справедливо выражение (5.36). Позади пика t' > 0 и, следовательно, $p_0 < 0$, поэтому при смещении контура интегрировании к перевальной точке влево последний «цепляется» за точку ветвления p = 0, обусловленную слагаемым порядка \sqrt{p} в (5.35). В итоге возникает добавочный вклад δG , определяемый интегралами вдоль берегов разреза. После подстановки (5.35) в (5.9), разложения подынтегрального выражения до первого порядка по \sqrt{p} , находим

$$\delta G = \frac{1}{(4\pi Dt')^{3/2}} \left(\frac{t_u}{t_a}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{ru}{2D}(1-\cos\varphi)\right],$$
(5.38)

где

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{r}\vec{u}\right)}{ru}$$

По мере уменьшения r, концентрация, определяемая δG , убывая по степенному закону, существенно превышает вклад от $G(t, \vec{r})$ (формула (5.36)), и фактически диктует поведение концентрации в области, где выполняется условие $t' > \sqrt{t_u t \ln(t_*/t)}$.

Таким образом, на временах $t_u \ll t \ll t_*$ перенос происходит в режиме, практически совпадающим с классической адвекцией-диффузией с почти симметричным гауссовым профилем, модифицированным позади фронта степенным шлейфом.

(1.2.б) $t_* \ll t \ll t_b$. В этом интервале в области основного облака примеси главным в разложении (5.35) становится член пропорциональный \sqrt{p} , так что справедлива аппроксимация

$$\Phi(p;t,\vec{r}) \approx \frac{ru}{2D} + \frac{r}{u}\sqrt{\frac{p}{t_a}} - pt'.$$
(5.39)

С учетом (5.39), при t' > 0 из выражения (5.9) находим

$$G \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2} Dt' \sqrt{D_u t'}} \exp\left[-\frac{ru}{2D} (1 - \cos \varphi) - \frac{r^2}{4D_u t'}\right].$$
 (5.40)

где

$$D_u = u^2 t_a \,. \tag{5.41}$$

Выражение (5.40) справедливо во всем временном интервале $t_* << t << t_b$. Однако режим переноса существенно отличается в двух диапазонах времени $t_* << t << t_a$ и $t_a << t << t_b$.

На временах $t_* \ll t \ll t_a$ среднее смещение облака частиц есть $\langle \vec{r} \rangle \approx \vec{u}t$ в то время как расплывание облака определяется выражением $\sigma(t) \sim ut (t/t_a)^{1/4}$. Поскольку $\langle r \rangle >> \sigma(t)$ мы можем заменить в показателе экспоненты r^2 на $u^2 t^2$. В итоге выражение для функции Грина примет вид

$$G \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2} Dt' \sqrt{D_u t'}} \exp\left[-\frac{ru}{2D} (1 - \cos \varphi) - \frac{t^2}{4t_a t'}\right].$$
 (5.42)

Таким образом, в данном диапазоне времени режимом переноса будет являться адвекция с резко анизотропным профилем концентрации. Позади максимума концентрации профиль характеризуется степенным убыванием, тогда как на переднем фронте концентрация убывает сначала резко экспоненциально, а затем по Гауссу.

На временах $t_a \ll t \ll t_b$ средняя величина смещения частиц примеси и их дисперсия одного порядка, $\langle r \rangle \sim \sigma(t) \sim \sqrt{D_u t}$. Поэтому в области основного облака и в области первой ступени хвоста концентрации можно заменить t' на t в (5.40). В итоге, имеем

$$G \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2} Dt \sqrt{D_u t}} \exp\left[-\frac{ru}{2D}(1 - \cos \varphi) - \frac{r^2}{4D_u t}\right].$$
 (5.43)

Существенно, что на этих временах $t >> t_a$ полное число активных частиц убывает со временем

$$N(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{t_a}{\pi t}} \tag{5.44}$$

Режим переноса аналогичный (5.43)-(5.44) был впервые найден для одномерного случая в работе [43] и получил название квазидиффузия. Заметим, что зависимости

 $\langle r \rangle \sim \sigma \sim t^{1/2}$ при квазидиффузионном режиме аналогичны зависимостям при классической диффузии, однако полное число частиц в данном случае не сохраняется.

Для вычисления концентрации в хвосте используем метод перевала. В области, определяемой условием $t' >> t \left(\frac{t_u}{2t_a}\right)^{1/3}$, перевальная точка, дающая наиболее медленное убывание концентрации, определяется выражением $p_0 = \frac{r^2}{4D_u t'^2}$. Вклад от этой точки сводится к выражению (5.40).

Для значений
$$|t'| \ll t \left(\frac{t_u}{2t_a}\right)^{1/3}$$
 перевальная точка имеет вид $p_0 \cong \left(t_u^2 t_a\right)^{-1/3}$, что

дает для области вблизи $r \approx ut$ следующую оценку для функции Грина $G \propto \exp\left(-\frac{3t}{4t_*}\right)$.

При r >> ut перевальная точка приобретает вид $p_0 \cong \frac{r^2}{4Dt^2}$, что приводит к классической диффузионной форме профиля концентрации (5.34).

(1.3) $t >> t_b$. На этих временах для основного облака и первой ступени хвоста концентрации главный вклад дают значения переменной Лапласа $p << t_b^{-1}$. Воспользовавшись разложением $\Lambda(p)$ (5.28), для Φ получаем

$$\Phi(p;t,r) \cong \frac{ru}{2D} - p\tilde{t}' - \frac{r\tilde{D}_u}{\tilde{u}^3} p^2, \qquad (5.45)$$

где введены обозначения $\tilde{u} = u \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}$, $\tilde{D}_u = BD_u$ и $\tilde{t}' = t - r/\tilde{u}$.

Подставляя (5.45) в (5.9), получаем для с области максимальной концентрацией $(\vec{r} \sim \vec{\tilde{u}t})$

$$G \cong \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} D\tilde{D}_{u}^{1/2} t^{3/2}} \exp\left[-\frac{ru}{2D} (1 - \cos\varphi) - \frac{(r - \tilde{u}t)^{2}}{4\tilde{D}_{u}t}\right].$$
 (5.46)

Данный режим очень близок к режиму классической адвекции-диффузии с модифицированными скоростью адвекции и диффузионным коэффициентом. Мы

будем называть этот режим медленной адвекцией-І. Среднее смещение примеси в этом случае $\langle r \rangle = \tilde{u}t$ и дисперсия $\sigma \simeq \sqrt{2\tilde{D}_u t}$, откуда следует $\langle r \rangle << \sigma$.

Отметим, что полное число частиц в этом режиме не зависит от времени и определяется формулой

$$N(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{t_a}{t_b}} \tag{5.47}$$

Оценим скорость расплывания облака примеси в поперечном направлении. В случаях (1.1) и (1.2а) дисперсия примеси в поперечном направлении (обозначим ее как $\sigma_{\perp} = \sqrt{\langle r_{\perp}^2 \rangle}$) следует непосредственно из формул (5.34) и (5.36), и имеет вид $\sigma_{\perp} \sim \sqrt{Dt}$. В случае (1.26) на временах $t_* \ll t \ll t_a$ при условии $r_{\parallel} \approx ut$ из первого слагаемого под экспонентой в выражении (5.42) следует, что убывание концентрации в поперечном направлении определяется зависимостью $\sim \exp(-r_{\perp}^2/4Dt)$. Таким образом, здесь, как и в предыдущих случаях, реализуется классическая диффузия. В случае (1.26) на временах $t_a \ll t \ll t_b$ среднее продольное смещение $\langle r_{\parallel} \rangle \sim \sqrt{D_u t}$, и соответственно, показатель экспоненты в (5.43) зависит от поперечной координаты как $-r_{\perp}^2/4D\sqrt{t_1t}$, то есть реализуется субдиффузия. В случае (1.3) из (5.46) в области пика концентрации, $r_{\parallel} \approx \tilde{u}t$, следует, что убывание концентрации в поперечном направлении, $r_{\parallel} \approx \tilde{u}t$, следует, что убывание концентрации в поперечном направлении, пропорционально $\exp(-r_{\perp}^2/4Dt)$, где

$$\tilde{D} = D \cdot \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \qquad (5.48)$$

и, следовательно, также реализуется режим классической диффузии. Подчеркнем, что в данном случае, в силу условия $t_u << t_a$ продольная дисперсия $\sigma_{\parallel} \approx \sqrt{4\tilde{D}_u t}$ много больше дисперсии примеси в поперечном направлении $\sigma_{\perp} \approx \sqrt{4\tilde{D}t}$.

(2)
$$t_a \ll t_u^2 / t_a \ll t_b$$
.

При вычислении функции Грина на временах $t \ll t_u^2/t_a$ можно пользоваться следующим приближением для функции Φ :

$$\Phi(p;t,r) \cong \frac{r}{\sqrt{D}} \sqrt{p + \sqrt{\frac{p}{t_a}}} - pt .$$
(5.49)

(2.1) $t \ll t_a$. Этот случай полностью аналогичен случаю (1.1).

(2.2) $t_a \ll t \ll t_u^2/t_a$. В этом диапазоне мы можем пренебречь слагаемым ~ p под корнем в (5.49). Подставляя выражение для Φ в (5.9), получаем

$$G(t, \vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi D t r} F(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{D\sqrt{t_a t}}}.$$
(5.50)

$$F\left(\xi\right) \cong \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp\left(s - \xi s^{1/4}\right) \frac{ds}{2\pi i}, \quad s = pt, \quad \operatorname{Re} a > 0.$$
 (5.51)

Это выражение соответствует субдиффузионному режиму, который ранее был исследован в главе 1. При этом режиме дисперсия частиц есть $\sigma \sim \sqrt{D\sqrt{t_a t}}$. Используя (5.51) нетрудно получить выражение для первой ступени асимптотики концентрации

$$G(t, \vec{r}) \cong \frac{1}{\sqrt{24\pi^3}Dtr} \left(\frac{\xi}{4}\right)^{1/3} \exp\left(-3\left(\frac{\xi}{4}\right)^{4/3}\right).$$
 (5.52)

Вторая ступень асимптотики соответствует классическому диффузионному выражению (5.34). На границе между первой и второй ступенями асимптотики (где $\xi \sim 4(t/3t_a)^{3/4}$) порядок функции Грина определяется выражением

$$G(t, \vec{r}) \sim (4\pi Dt)^{-1/3} \exp(-t/t_a).$$
 (5.53)

(2.3) $t_u^2/t_a \ll t \ll t_b$. В этом временном интервале реализуется режим квазидиффузии (выражение (5.43)) в основном облаке и первой ступени хвоста. Вторая ступень определяется выражением (5.52), а третья описывается классической диффузией (выражение (5.34)).

(2.4) t >> t_b. Вывод для основного облака и первой ступени хвоста проводится аналогично случаю (1.3) и приводит к выражению, описывающую медленную адвекцию-I (см. (5.46)). На этих временах хвост состоит из четырех ступеней, описываемых формулами (5.46), (5.43), (5.52), и (5.34), соответственно. В поперечном направлении в случае (2.1) перенос происходит в режиме классической диффузии с коэффициентом D, в случаях (2.2) и (2.3) – в режиме субдиффузии, и в случае (2.4) – в режиме классической диффузии с коэффициентом \tilde{D} .

$$(3) t_u^2 / t_a >> t_b$$

(3.1) *t* << *t_a*. Этот случай совпадает со случаем (1.1), так что перенос определяется классической диффузией.

(3.2) $t_a << t << t_b$ В этом случае реализуется режим субдиффузии (см. случай (2.2)).

(3.3) $t_b \ll t \ll t_u \sqrt{t_b/t_a}$. Здесь можно воспользоваться приближением (5.28), а также $u \to 0$ для области основного облака примеси и первой ступени хвоста. В результате с учетом (5.29) получаем

$$G(t,\vec{r}) \cong \frac{3}{\left(4\pi\tilde{D}t\right)^{3/2}} \sqrt{\frac{t_a}{t_b}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\tilde{D}t}\right), \qquad (5.54)$$

Данный режим соответствует медленной классической диффузии.

(3.4) $t >> t_u \sqrt{t_b/t_a}$. Формально этот случай совпадает со случаем (1.3). Так что функция Грина (5.46) описывает поведение концентрации в основном облаке и первой ступени хвоста. Однако в данном случае коэффициент диффузии \tilde{D}_u должен быть заменен на \tilde{D} , введенный формулой (5.48). Мы будем называть этот режим медленной адвекцией-II.

В поперечном направлении в случае (3.1) перенос происходит в режиме классической диффузии с коэффициентом *D*, в случае (3.2) – в режиме субдиффузии, и в случаях (3.3) и (3.4) – в режиме классической диффузии с коэффициентом \tilde{D} .

Анализ поведения концентрации на асимптотически больших расстояниях показывает, что хвосты имеют многоступенчатую структуру и справедлива следующая закономерность: по мере увеличения расстояния от источника реализуются режимы переноса основного облака примеси в более ранние интервалы времени. Такая закономерность в структуре хвостов была установлена ранее в предыдущих главах.

5.3 Эффекты сорбции в матрице

Остановимся кратко на вопросе, к каким эффектам может привести возможность сорбции примеси в среде. Под сорбцией обычно понимают те случаи, когда вещество из раствора (или газовой фазы) концентрируется на поверхности конденсированной фазы (в нашем случае на поверхности пор, трещин) практически не проникая в объем этой фазы [74]. Время установления локального равновесия между растворенной и адсорбированной фазами определяется временем диффузии примеси в растворе на расстояния порядка радиуса пор (или апертуры трещин) и для характерных величин ~ $f \sim 1 \mu m$ составляет не более секунды. То есть в данном случае можно с хорошей точностью пользоваться моделью переноса в сорбирующей среде, в которой растворенная и адсорбированная фазы находятся в равновесии, и их концентрации *с* и c_{ad} связаны коэффициентом распределения K_D :

$$c_{ad} \approx K_D c \tag{5.55}$$

Здесь мы будем считать, что c_{ad} также определяется на единицу объема (а не на единицу массы адсорбента, как это принято в гидрогеологии). Доля адсорбированной примеси ($~K_D$) растет с увеличением удельной поверхности, на которой эта примесь может адсорбироваться. Поэтому в практически важных случаях влияние сорбции будет сказываться только на процессах переноса в пористых блоках. Для трещин этим влиянием можно пренебречь, поскольку удельная поверхность в пористых блоках значительно больше, чем в системе трещин.

Тогда для описания переноса в пористых блоках вместо уравнения (5.13) мы имеем систему уравнений

$$\frac{\partial \overline{n}}{\partial t} = d\Delta \overline{n} - q , \qquad (5.56)$$

$$\frac{\partial \overline{n}_{ad}}{\partial t} = q , \qquad (5.57)$$

где \overline{n}_{ad} есть концентрация примеси, адсорбированной на поверхности пор в блоках, а q описывает обмен между фазами. Складывая (5.56) и (5.57), и учитывая приближенное равновесие фаз $\overline{n}_{ad} \approx K_D \overline{n}$, получаем вместо (5.13) следующее уравнение для растворенной фазы

$$R\frac{\partial \overline{n}}{\partial t} = d\Delta \overline{n} , \qquad (5.58)$$

где $R \approx 1 + K_D$. Решение системы (5.12)-(5.28) с заменой (5.13) на (5.58) приводит к тем же результатам для функции памяти (5.24), (5.28), в которых, однако, характерные времена t_a и t_b должны быть заменены на

$$\tilde{t}_a = \left(\frac{V_b}{S_b A}\right)^2 \frac{1}{Rd},$$
(5.59)

$$\tilde{t}_b = \left(\frac{V_b}{S_b}\right)^2 \frac{R}{d}.$$
(5.60)

С учетом этой замены все выводы данной главы остаются справедливыми и для среды с сорбцией.

5.4 Обсуждение и выводы

В данной главе развита модель и описаны режимы переноса примеси в двупористой (трещиновато-пористой) среде. Показано, что в большом диапазоне времени отсутствует равновесие между подвижной и адсорбированной фракциями примеси, так что процесс переноса описывается режимами, качественно отличающимися от классического режима адвекции-диффузии, имеющим место в модели равновесной сорбции.

Совокупность и последовательность режимов переноса определяется соотношением между тремя характерными временами t_a , t_b и t_u . Можно выделить три случая: $t_u \ll t_a$, $t_a \ll t_u^2/t_a \ll t_b$, $t_u^2 \gg t_a t_b$. В первом случае ($t_u \ll t_a$, средняя скорость адвекции велика), реализуется последовательность пяти режимов: классической диффузии, классической адвекции-диффузии, адвекции со степенным шлейфом, квазидиффузии, медленной адвекции-I. При $t_a \ll t_u^2/t_a \ll t_b$ последовательность режимов следующая: классическая диффузия, субдиффузия, квазидиффузия, медленная адвекция-I. В случае малой средней скорости адвекции, $t_u^2 \gg t_a t_b$, реализуются

классическая диффузия, субдиффузия, медленная классическая диффузия, медленная адвекция-II.

Для иллюстрации на рисунках 5.2-5.6 изображены зависимости от времени полного числа частиц, среднего смещения и дисперсии.

 \tilde{N}



Рис. 5.2 Зависимость полного числа активных частиц от времени $\tilde{t} = t/t_b$, $\tilde{N} = N/N_0$.



Рис. 5.3 Зависимость среднего смещения частиц примеси от времени $\tilde{t} = t/t_b$,





Рис. 5.4 Зависимость дисперсии $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{D_u t_b}$ от времени $\tilde{t} = t/t_b$ для быстрой

адвекции: $t_u < t_a < t_b$.



Рис. 5.5 Зависимость дисперсии $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{D_u t_b}$ от времени $\tilde{t} = t/t_b$ для умеренной адвекции: $t_u > t_a$, $t_u^2 < t_a t_b$.



Рис. 5.6 Зависимость дисперсии $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{D_u t_b}$ от времени $\tilde{t} = t/t_b$ для медленной адвекции: $t_u^2 > t_a t_b$.

Важным результатом настоящей модели, является то, что на больших временах, когда имеет место равновесие между растворенной и адсорбированной фазами,
поведение системы может отличаться от результатов общепринятой равновесной модели. В последней перенос примеси описывается режимом адвекции-диффузии с уменьшенными в *R* раз скоростью адвекции и коэффициентом дисперсии: $\vec{u}_{eff} = \frac{\vec{u}}{R}$,

 $D_{eff} = \frac{D}{R}$. Совпадение между результатами двух моделей имеет место только при достаточно медленной средней скорости течения, когда выполняется соотношение $t_u^2 >> t_a t_b$. В этом случае $R \approx \sqrt{t_b/t_a} >> 1$. В обратном пределе, если $t_u^2 << t_a t_b$, средняя скорость движения максимума концентрации, по-прежнему, имеет вид $\vec{u}_{eff} = \frac{\vec{u}}{R}$, однако расплывание облака примеси определяется взаимодействием примеси с ловушками, так что эффективный коэффициент дисперсии есть $\tilde{D}_u \approx u^2 t_a$. Учитывая условие $t_u^2 << t_a t_b$, получаем $\tilde{D}_u >> D_{eff} \approx D/R$, то есть расплывание облака примеси происходит гораздо быстрее, чем в соответствии с общепринятой равновесной моделью.

Поведение концентрации на расстояниях много больших размеров облака примеси описывается многоступенчатыми хвостами. С увеличением расстояния характер убывания в хвостах диктуется все более ранними по времени режимами.

ГЛАВА 6

КОЛЛОИДНО-УСИЛЕННЫЙ ПЕРЕНОС В ДВУПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Как показано в предыдущих главах наличие в двупористых средах слабопроницаемых областей приводит к существенному замедлению переноса, поскольку частицы примеси, диффундируя в эти области, проводят в «быстрой» подсистеме только часть времени. Наличие в среде подвижных коллоидных частиц, способных адсорбировать примесь, может привести к подавлению процесса ухода примеси в слабопроницаемые области и, как следствие, эффективному ускорению переноса.

Под коллоидами в задачах геомиграции обычно понимают мелкие частицы (размеров от нескольких нанометров до долей микрона), мигрирующие в среде под действием течения грунтовых вод. Коллоидные частицы в грунтовых водах могут являться как нерастворимыми фрагментами самой примеси, образующимися в результате выщелачивания или выпадения примеси из пересыщенного раствора (т. н., истинные коллоиды), так и посторонними частицами, например, частичками глины («псевдоколлоиды»). Для определенности ниже мы будем рассматривать процессы переноса при наличии псевдоколлоидов, способных адсорбировать примесь из раствора.

При исследовании переноса примеси в пористых средах было экспериментально показано, что наличие коллоидов, способных сорбировать примесь приводит к существенному ускорению переноса примеси [75, 76]. Большинство моделей, которые были развиты к настоящему времени, подразумевали, что в системе имеется равновесие между примесью в растворе и адсорбированной на коллоидах [77-80]. При таком подходе теория приводила к сильной недооценке концентрации на больших расстояниях. Для преодоления этой трудности в модели учитывалась конечная скорость обмена между растворенной и адсорбированной фракциями, причем считалось, что сорбция происходит быстро, а десорбция медленно. Например в [81] рассматривалась необратимая сорбция (время десорбции полагалось бесконечности. Некоторые модели (см., например, [82]) включали, также динамику самих коллоидных частиц, учитывая возможность их прилипания и отлипания от стенок каналов. В другой модели [75] была развито так называемое "two-box" приближение, когда для некоторой

146

части объема было справедливо равновесное приближение, а для другой части используется кинетический подход.

В нашей модели мы рассматриваем коллоидно-усиленный перенос в двупористых средах. Перенос коллоидов происходит по каналам хорошо проницаемой подсистемы (например, по сети трещин). Размеры пор слабопроницаемой подсистемы (матрицы) существенно меньше размеров коллоидных частиц, поэтому коллоиды не уходят в эту подсистему. Вместе с ними в быстрой подсистеме остается и адсорбированная на них примесь.

Задача данной главы – построение модели и описание режимов переноса примеси в двупористых средах при наличии коллоидов.

Далее в разделе 6.1 будет описана модель и проанализированы режимы переноса для регулярно неоднородной двупористой среды. В разделе 6.2 данная задача будет решена для сред с фрактальными свойствами. В разделе 6.3 будут приведены результаты для статистически однородных сред.

6.1 Регулярно-неоднородные среды.

Постановка задачи

Мы рассматриваем перенос примеси в регулярно - неоднородной среде, состоящей из двух областей с сильно различающимися транспортными свойствами, являющейся частным случаем двупористой среды. Область 1 представляет собой канал, вытянутый вдоль осей Ox и Oy. Толщина канала вдоль координаты z равна a. Канал заполнен водой, текущей с постоянной скоростью u в направлении Ox. Растворенная в воде примесь переносится течением со скоростью u, и диффундирует с коэффициентом молекулярной диффузии d_m . Также в канале присутствуют коллоидные частицы, на поверхности которых имеют место процессы сорбции и десорбции содержащейся в растворе примеси. Осажденная на коллоидах часть примеси переносится вместе с ними. Схематически данные процессы изображены на Рис. 6.1.



Рис. 6.1 Иллюстрация к постановке задачи о переносе примеси в регулярнонеоднородной среде при наличии коллоидов.

Канал окружен пористой матрицей (область 2). Растворенная примесь может уходить в матрицу. Диффузия примеси в матрице происходит также по жидкой фазе, заполняющей микропоры. Вследствие извилистости поровых каналов соответствующий коэффициент диффузии d, как правило, меньше (иногда значительно меньше) коэффициента d_m .

Мы рассматриваем случай, когда коллоиды движутся в канале с той же скоростью *u*, что и жидкость. Как указано выше, в силу больших по сравнению с радиусом пор в матрице размеров коллоидных частиц их уход в матрицу запрещен. Также, ввиду больших по сравнению с молекулярными размерами коллоидных частиц, можно пренебречь их диффузией в канале. Коллоиды распределены в канале однородно с концентрацией №.

Поскольку влияние коллоидов на перенос примеси, которое мы хотим исследовать, имеет место в направлении Ox, то ниже мы ограничимся двумерной постановкой, подразумевая под c, концентрацию примеси в растворе, проинтегрированную по y от $-\infty$ до $+\infty$.

Концентрация растворенной примеси с в канале описывается уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - d_m \Delta_2 c = -q \tag{6.1}$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а *q* описывает сорбцию (и десорбцию) примеси из раствора на поверхности коллоидов. Выражение для *q* имеет вид

$$q = (c - \sigma m) / \tau \tag{6.2}$$

с есть концентрация, усредненная по микрообъему, содержащему большое число коллоидных частиц, а *u* есть среднее по толщине канала значение скорости.

Концентрация примеси *n* в области 2 (в матрице) также описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - d\Delta n = 0. \tag{6.3}$$

Нетрудно учесть сорбцию примеси на стенках каналов в среде 2. Отметим, что время установления равновесия между примесью адсорбированной на стенке и примесью в объеме канала \tilde{t}_1 порядка $\tilde{t}_1 \sim \delta^2/4d_m$, где δ - характерная толщина каналов в среде 2. И поскольку *b* много меньше всех остальных размеров задачи (заведомо можно утверждать, что $a/\delta \ge 10^3$), то на интересующих нас временах можно считать данное равновесие установившимся. Отсюда следует, что сорбция в матрице приводит лишь к перенормировке коэффициента диффузии в матрице:

$$d \to \tilde{d} = d/R \,. \tag{6.4}$$

где $R = 1 + K_D$ - стандартный коэффициент задержки в равновесной модели с сорбцией.

Связь между величинами *с* и *n* определяется граничными условия, которые заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Перенос части примеси *m* адсорбированной на коллоидах (на единицу объема раствора внутри трещины) определяется движением коллоидов. Поскольку коэффициент диффузии коллоидов обратно пропорционален их размеру, то их диффузией можно пренебречь по сравнению с адвекцией и диффузией примеси в растворе. В итоге, уравнение для *m* принимает вид

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial x} = q \tag{6.5}$$

Мы будем решать задачу с начальным условием, которое заданно выражением:

$$c(x,z)\Big|_{t=0} = N_0 \delta(x) \delta(z).$$
(6.6)

Значения параметров, характеризующих задачу, могут лежать в широком диапазоне, и в зависимости от соотношений между ними реализуются различные режимы переноса.

Далее будем рассматривать поведение примеси на временах $t >> t_0$ ($t_0 = a^2 / 4d_m$), когда распределение частиц в канале практически однородно по координате z.

Помимо времени t_0 существуют еще два характерных времени, определяющих поведение примеси в растворе: 1) характерное время, которое мы обозначим t_1 , начиная с которого становится существенным влияние окружающей трещину пористой матрицы (аналог времен t_1 и t_a предыдущих глав 1 и 5, соответственно), и которое определяется временем проникновения примеси в матрицу на глубину порядка толщины канала ~ *a* :

$$t_1 = \frac{a^2}{4\tilde{d}},\tag{6.7}$$

и 2) время t_u , такое что при $t > t_u$ перенос частиц растворенной примеси в результате адвекции вдоль трещины начинает превосходить их смещение в результате диффузии

$$t_u = \frac{4d_m}{u^2}.\tag{6.8}$$

Мы рассмотрим наиболее интересный случай сильной адвекции $t_u \ll t_1$ и проанализируем различные варианты соотношений между характерными величинами τ , t_1 и σ .

Вывод основных соотношений

Проинтегрировав уравнение (6.1) по координате z внутри канала и выполнив преобразование Фурье по координате x, а также преобразование Лапласа по времени, приходим к алгебраическому уравнению:

$$\left(p + iku + D_m k^2 + \tau^{-1}\right)c_{pk} + \frac{Q_{pk}}{a} = \frac{N_0}{a} + \tau^{-1}\sigma m_{pk}.$$
(6.9)

Здесь

$$c_{p,k} = \int_{0}^{\infty} dt \int dx \exp\left(-pt - ikx\right) c\left(x,t\right)$$
(6.10)

c(x,t) – концентрация, усредненная по z. Аналогичным способом определяется m_{pk} . Величина Q_{pk} есть Фурье-Лаплас образ плотности потока примеси через границу, отнесенной к единице ее площади; N_0 , полное число частиц примеси. При выводе (6.9) полагалось, что начало координат находится внутри объема первоначальной локализации примеси.

Аналогично (6.9), уравнение (6.5) для частиц, адсорбированных на коллоидах, в представлении Фурье-Лапласа принимает вид

$$\left(p + iku + \sigma/\tau\right)m_{p,k} = c_{p,k}/\tau.$$
(6.11)

Определение проводится совершенно аналогично тому, как это делалось в главе 1. Решение уравнения (6.3) с учетом (6.4) и равенства концентраций n и c на границе канала приводит к следующему выражению для Фурье-Лаплас компоненты концентрации частиц в матрице при $t >> t_0$:

$$n_{pk}\left(z\right) = c_{pk} \exp\left\{-\sqrt{\frac{p+\tilde{d}k^2}{\tilde{d}}}\left(|z|-\frac{a}{2}\right)\right\}, \qquad |z| > \frac{a}{2}.$$
(6.12)

Поток частиц на границе канал-матрица вычисляется из (6.12) согласно

$$Q_{pk} = -2\tilde{d} \left. \frac{\partial n_{pk}}{\partial z} \right|_{z=a/2}.$$
(6.13)

Подставляя получающееся отсюда выражение для Q_{pk} в (6.9) и разрешая систему (6.9) и (6.11), для m_{pk} получаем

$$m_{p,k} = \frac{N_0}{a\tau} \left[\left(p + iku + D_m k^2 + \tau^{-1} + \sqrt{\frac{p + \tilde{d}k^2}{t_1}} \right) \left(p + iku + \sigma/\tau \right) - \sigma/\tau^2 \right]^{-1}, \quad (6.14)$$

В дальнейшем нас будет интересовать поведение примеси адсорбированной на коллоидах m(x,t), поскольку именно эта фракция приводит к усиленному переносу примеси на большие расстояния и, в том числе, определяет на этих расстояниях и

концентрацию растворенной компоненты. Непосредственный же перенос растворенной компоненты по жидкой фазе существенно замедляется вследствие ухода примеси в матрицу. Для концентрации m(x,t) получаем следующее выражение:

$$m(t,x) = \frac{N_0}{a\tau} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\exp(pt+ikx)}{\left(p+iku+\sigma/\tau\right) \left(p+iku+D_mk^2 + \sqrt{\frac{p+\tilde{d}k^2}{t_1}}\right) + \left(p+ikv\right)/\tau}, \operatorname{Re} b > 0 \ (6.15)$$

Выводы о перераспределении частиц примеси в системе можно сделать уже из анализа зависимости от времени полного числа частиц, адсорбированных на коллоидах.

Полное число частиц, адсорбированных коллоидами, и неравновесные режимы переноса

Проанализируем изменение полного числа частиц примеси, адсорбированной на коллоидах, для различных интервалов времени, выражение для которого получается интегрированием соотношения (6.15) по координате *x*:

$$M(t) = a \int_{-\infty}^{+\infty} m(t, x) dx = \frac{N_0}{\tau} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(pt)}{\left(p + \sigma/\tau\right) \left(p + \sqrt{\frac{p}{t_1}}\right) + p/\tau}, \qquad \text{Re}\, b > 0.$$
(6.16)

Как уже указывалось, перенос примеси зависит от соотношения между временами τ и t_1 и параметра σ . Рассмотрим отдельно диапазоны изменения параметра σ : $\sigma < 1$ (сильная сорбция на коллоидах) и $\sigma > 1$ (слабая сорбция на коллоидах).

С точки зрения ускорения переноса более интересна ситуация $\sigma < 1$. Для нее мы проанализируем три случая:

1) $t_1 << \tau$, $\sigma \tau << t_1$ - сравнительно медленная, но очень сильная сорбция,

2) $t_1 \ll \tau$, $t_1 \ll \sigma \tau$ - умеренно сильная сорбция,

3) $\tau \ll t_1$ - процесс сорбции происходит очень быстро.

Перенос примеси наряду с τ и t_1 определяется также следующими характерными временами

$$\tau_1 = \tau \frac{\tau}{t_1}, \quad \tau_2 = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \tau_3 = \frac{t_1}{\sigma^2}.$$
(6.17)

С учетом этого обстоятельства рассмотрим указанные выше случаи по порядку.

1) <u> $t_1 \ll \tau$, $\sigma \tau \ll t_1$ </u>. Здесь характерные времена в порядке возрастания располагаются следующим образом:

$$t_1 <\!\!< \tau <\!\!< \tau_1 <\!\!< \tau_2 <\!\!< \tau_3$$

Для каждого из возникающих интервалов вычислим интеграл (6.16) в главном порядке.

1a)
$$t_0 \ll t \ll t_1$$
: $M(t) \approx N_0 \frac{t}{\tau}$. (6.18)

В этом интервале практически вся примесь содержится в растворе. В матрице ее очень мало в силу $t \ll t_1$. На коллоидах ее также мало в силу $t \ll \tau$, так что выражение (6.18) для M(t) является первым членом разложения зависимости $M \approx N_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$, описывающей стандартный процесс сорбции примеси на коллоидах. Так как почти вся примесь находится в растворе, то ее перенос определяется либо диффузией (при $t < t_u$), либо дрейфом ($t > t_u$).

16)
$$t_1 \ll t \ll \tau_1$$
: $M(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{4t}{\pi \tau_1}}$. (6.19)

На этих временах в матрице находится уже значительная часть примеси. В растворе, протекающем в трещине, остается лишь доля примеси ~ $N_0 \sqrt{\frac{t_1}{t}}$, которая продолжает осаждаться на коллоидах со скоростью, определяемой выражением (6.18), так что в итоге для количества осажденной примеси получаем (6.19). Отметим, что из выражения (6.19) следует, что эффективным временем осаждения примеси на коллоидах является время τ_1 , причем $\tau_1 >> \tau$. В силу условия $t \ll \tau_1$ доля примеси, осажденная на коллоидах, по-прежнему, мала, и перенос в трещине определяется растворенной примесью, то есть происходит в режиме квазидиффузии, который характерен для обобщенной модели Дыхне (см. главу 1) при $t >> t_1$.

При $t \sim \tau_1$ раствор уже существенно обедняется примесью. Осажденная на коллоидах примесь переносится вниз по течению, а сзади остается область обедненного раствора, в результате чего возникает обратный поток примеси из матрицы в раствор. Перекачка примеси в коллоиды становится доминирующим процессом, так что при $t >> \tau_1$ практически вся примесь оказывается сосредоточенной на коллоидах.

$$1\Gamma) \qquad \tau_2 << t << \tau_3: \qquad M\left(t\right) \approx N_0 \left(1 - \sqrt{\frac{4t}{\pi \tau_3}}\right), \tag{6.21}$$

В начале этого интервала почти вся примесь (в силу $\sigma \ll 1$) сосредоточена на коллоидах, и имеется приближенное равновесие между растворенной и адсорбированной компонентами $c(t) \cong \sigma m(t)$. По мере распространения примеси вниз по течению, в области, где в матрице примесь отсутствует, начинается обратная перекачка ее из коллоидной фракции в матрицу. Разница между полным количеством примеси и ее долей локализованной на коллоидах $N_0 - M(t)$ определяется примесью сосредоточенной в матрице, количество которой растет по диффузионному закону $\sim n(t)\sqrt{t/t_1}$, чем и объясняется вид выражения (6.21).

Учитывая, что во всем диапазоне времени $\tau_1 \ll t \ll \tau_3$ практически вся примесь адсорбирована коллоидами, можно ожидать (что подтвердится вычислениями ниже), что перенос примеси будет происходить в баллистическом режиме, то есть с постоянной скоростью.

1д)
$$t \gg \tau_3$$
: $M(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{\tau_3}{\pi t}}$, (6.22)

В этом интервале по-прежнему поддерживается равновесие между растворенной и адсорбированной компонентами. Скорость совместного процесса десорбции примеси и ее ухода в матрицу лимитируется последним, поэтому перенос в трещине будет происходить в квазидиффузионном режиме, аналогично переносу в обобщенной модели Дыхне.

2) <u> $t_1 \ll \tau$ </u>. В этом случае расположение характерных времен в порядке возрастания меняется:

$$t_1 <\!\!< \tau <\!\!< \tau_3 <\!\!< \tau_2 <\!\!< \tau_1$$

Соответственно, меняется очередность во времени режимов переноса. Ограничиваясь вычислениями в главном порядке, получаем

2a)
$$t_0 \ll t \ll t_1$$
: $M(t)$ определяется формулой (6.18); (6.23)

2б)
$$t_1 << t << \tau_2$$
: $M(t)$ определяется формулой (6.19). (6.24)

В интервале 26) основная часть примеси находится уже в матрице, и вид выражения (6.19) объясняется теми же соображениями, что и в случае 16).

К моменту τ_2 , когда устанавливается равновесие между раствором и адсорбированной компонентой $c(t) \cong \sigma m(t)$ на коллоидах содержится лишь $M(\tau_2) \approx N_0 \sqrt{\frac{t_1}{\tau \sigma}}$, после чего начинается перекачка примеси с коллоидов в матрицу:

2B)
$$t \gg \tau_2$$
 $M(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{\tau_3}{\pi t}}$. (6.25)

Таким образом, в данном случае максимальное количество примеси, адсорбированное на коллоидах, оказывается существенно меньше полного количества примеси: $M_{\text{max}} \approx M(\tau_2) \approx N_0 \sqrt{\frac{t_1}{\tau \sigma}}$.

3) <u> $\tau \ll t_1$ </u> <u> $\sigma \ll 1$ </u>. В этом случае границы интервалов, на которых происходит смена режимов, определяются временами τ и τ_3 , та что

$$\tau << \tau_3$$

Вычисления дают

$$t_0 \ll t \ll \tau: \quad M(t) \approx N_0 \frac{t}{\tau}, \tag{6.26}$$

$$\tau \ll t \ll \tau_3: \quad M(t) \approx N_0, \tag{6.27}$$

$$\tau_3 \ll t: \quad M(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{\tau_3}{\pi t}} . \tag{6.28}$$

В этом случае можно считать, что примесь переносится коллоидами до тех пор, пока ее количество в матрице $\sim \frac{N_0}{\sigma} \sqrt{\frac{t_*}{t_1}}$ не будет по порядку величины равно ее количеству на коллоидах ~ N_0 , откуда и следует, что $t_* \approx \tau_3$.

Если σ не сильно отличается от единицы, то в выражениях (6.26)-(6.28) надо учесть поправочный множитель $(1 + \sigma)^{-1}$.

Для полноты картины рассмотрим случай $\sigma > 1$. Здесь при условии $t_1 << \tau$ характерные времена располагаются в следующем порядке:

$$\tau_3 << t_1 << \tau_2 << \tau << \tau_1$$

В интервале $t_0 \ll t \ll t_1$ справедлив режим (6.18), при $t_1 \ll t \ll \tau_2$ - режим (6.19), а при $t >> \tau_2$ наступает режим (6.22). И опять, как и в случае 2) максимум концентрации на коллоидах достигается на временах порядка τ_2 и оказывается $\sim \frac{N_0}{\sigma} \sqrt{\frac{t_1}{\tau_2}}$, что существенно меньше максимально возможной концентрации при

заданном начальном количестве примеси.

Пространственное распределение концентрации примеси

Пространственное распределение примеси, адсорбированной коллоидами определяется выражением (6.15). В общем случае вычисления довольно громоздкие, но учитывая, что нас интересует случай малых времен t_v , на большей части пространственного интервала 0 < x < vt мы можем пренебречь диффузией и положить в знаменателе D = 0. В итоге знаменатель оказывается квадратичным по волновому

вектору и интеграл по *k* определяется полюсами в точках $k_1 \approx i \left(\frac{p}{u} + \frac{\sqrt{p/\tau_3}}{1 + \sqrt{p\tau_1}} \right)$ и

$$k_2 \approx i \left(\frac{p}{u} + \frac{1}{\tau} + \sqrt{\frac{p}{\tau_1}} \right)$$
. Второй полюс в комплексной плоскости волнового вектора лежит

существенно выше первого, так что определяемый им вклад в концентрацию быстро затухает с расстоянием, и мы им пренебрегаем. Интегрируя оставшееся выражение по

переменной Лапласа, получаем при $t >> \tau_2$ для основного облака и области ближнего хвоста:

$$m(t,x) \approx \frac{N_0}{2av} \frac{x}{\sqrt{4\pi D_3 \tilde{t}^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_3 \tilde{t}}\right), \tag{6.29}$$

где $D_3 = u^2 \tau_3$, а $\tilde{t} = t - x/u$. Форма облака примеси такова, что концентрация плавно нарастает в диапазоне до некоторого значения x^* , после чего довольно резко убывает. Значение x^* приблизительно определяется равенством единице выражения, стоящего в показателе экспоненты. Вычисления дают, что

при
$$t \ll \tau_3$$
 $x^* \approx vt$, (6.30)

при
$$t >> \tau_3$$
 $x^* \approx \sqrt{4D_3 t}$. (6.31)

Выражение (6.30) означает, что на временах, когда на коллоидах сосредоточено основное количество примеси, расширение облака примеси происходит почти с постоянной скоростью, то есть в баллистическом режиме.

На больших временах, которые, как следует из выражения для τ_3 , определяется как временем t_1 , так и константой сорбции σ , рост размеров облака оказывается пропорциональным корню из времени (6.31). Отметим, что, несмотря на классическую диффузионную зависимость положения фронта от времени, данный режим переноса следует считать аномальным. Во-первых, как следует из выражений, полученных в разделе 6.1.3, полное количество примеси адсорбированной на коллоидах не сохраняется (уменьшается со временем). И, во-вторых, распределение примеси вдоль координаты является резко анизотропным.

Выводы

В развитой модели ключевыми параметрами, определяющими динамику процессов переноса в регулярно неоднородной двупористой среде в присутствии коллоидов, являются следующие величины:

 t_1 - характерное время ухода примеси в матрицу,

τ - время осаждения частицы примеси на коллоиде,

157

σ - коэффициент равновесного распределения примеси между раствором и коллоидами.

Для переноса в регулярно неоднородной резко контрастной среде при сравнительно медленной сорбции на коллоидах ($t_1 \ll \tau$) эффективная скорость сорбции определяется характерным временем $\tau_1 = \tau^2/t_1$.

В случае очень сильной сорбции ($\sigma \ll 1$) – такой, что $\tau \sigma \ll t_1$, в интервале времени $\tau_1 \ll t \ll \tau_3 = t_1/\sigma^2$ практически вся примесь оказывается сосредоточенной на коллоидах и переносится вместе с ними в баллистическом режиме (дрейфа с постоянной скоростью). На больших временах $t \gg \tau_3$ десорбция и окончательный уход примеси в матрицу приводят к замедлению переноса, приводящему к режиму квазидиффузии.

Практически такое же поведение характеризует систему и при быстрой сорбции $t_1 >> \tau$.

При медленной $(t_1 \ll \tau)$, но не очень сильной сорбции $(\sigma < 1, \tau \sigma > t_1)$, наступление режима квазидиффузии определяется временем $\tau_2 = \tau/\sigma$. При этом максимальное количество примеси, адсорбируемое на коллоидах, оказывается гораздо меньше полного их числа N_0 , $M_{\rm max} \sim N_0 \sqrt{\frac{t_1}{\sigma \tau}}$, однако конечный режим (квазидиффузия) остается тем же.

6. 2 Фрактальные среды

Постановка задачи

Как уже указывалось, одним из ключевых факторов, определяющих течение влаги и перенос примеси в геологических средах является геометрия сетки трещин. В настоящем разделе будет рассмотрен случай, когда ускоренный коллоидами перенос примеси происходит по системе трещин, которая может быть классифицирована как изотропная перколяционная среда с бесконечным радиусом корреляции. Обобщение на анизотропный случай и перколяционные среды с конечной длиной корреляции не представляет труда. Основные свойства такой среды (структура перколяционного кластера, а также характеристики течения) были описаны в Разделах 2, 4.

Если в системе присутствуют коллоиды, то перенос последних на большие расстояния определяется тем же полем скоростей, что и перенос растворенной ловушками компоненты. Характер взаимодействия растворенной примеси с определяется типом ловушек. Как указано в главе 4, в перколяционной трещиноватопористой среде можно выделить два типа ловушек. Первые – это мертвые концы перколяционного кластера, и вторые – это каналы, сформированные порами в матрице. Поскольку и те и другие заполнены неподвижной водой, уход растворенной примеси в них возможен только благодаря диффузии. Как и в предыдущем разделе, мы считаем, что уход коллоидов в пористую среду невозможен вследствие того, что их размеры превосходят размеры микропор, формирующих пористость матрицы. Уход же коллоидов в мертвые концы перколяционных кластеров также сильно подавлен в силу больших размеров частиц (коэффициент диффузии мигрирующей частицы уменьшается с ростом ее размера). Таким образом, движение коллоидов полностью определяется случайным полем скоростей адвекции в остове перколяционного кластера. В настоящей модели мы ограничиваемся случаем, когда отсутствует взаимодействие коллоидов со стенками каналов. Мы также полагаем, что концентрация коллоидов постоянна. Обмен примесью между раствором и коллоидными частицами описывается в приложении.

Итак, основой настоящей модели коллоидного переноса примеси в перколяционной среде являются следующие три фактора: 1) корреляционные свойства поля скоростей адвекции, 2) наличие присущих перколяционной среде ловушек, и 3) конечная скорость взаимодействия примеси с коллоидами.

Перенос растворенной *с* и адсорбированной на коллоидах *m* компонент примеси внутри трещин подчиняется следующим уравнениям:

$$\partial_t c + \partial_t \hat{\pi} c + \vec{\nabla} (\vec{v}c) = -\tau^{-1} (c - \sigma m)$$
(6.32)

$$\partial_t m + \vec{\nabla} \left(\vec{v}m \right) = \tau^{-1} \left(c - \sigma m \right) \tag{6.33}$$

Свойства поля скоростей $\vec{v}(\vec{r})$ описаны в главе 2, а свойства ловушек (с учетом переобозначения в формуле (4.2) $\partial_t \hat{\pi} c = Q$) описаны в главе 4.

Правые части уравнений (6.32) и (6.33), описывающий сорбцию и десорбцию примеси на коллоидных частицах записаны в линейном приближении, что подразумевает, что система находится вдали от насыщения. Параметры τ и σ , как и

ранее, описывают характерное время сорбции и коэффициент распределения, соответственно.

Мы рассматриваем задачу с начальными условиями:

$$c(\vec{r}, t=0) = c_0(\vec{r})$$
 (6.34)

$$m(\vec{r}, t=0) = 0 \tag{6.35}$$

Уравнения для полного числа частиц в растворе N и адсорбированных на коллоидах M,

$$N(t) = \int d^3 r c(\vec{r}, t),$$

$$M(t) = \int d^3 r m(\vec{r}, t)$$
(6.36)

получаются интегрированием системы (6.32) - (6.33) по всему пространству:

$$\partial_t \left(1 + \hat{\pi} \right) N = -\tau^{-1} \left(N - \sigma M \right) \tag{6.37}$$

$$\partial_t M = \tau^{-1} \left(N - \sigma M \right) \tag{6.38}$$

Начальные условия для данной системы имеют вид

$$N(0) = N_0 = \int d^3 r \, c_0(\vec{r}) \tag{6.39}$$

$$M\left(0\right) = 0 \tag{6.40}$$

Здесь N₀ есть полное количество частиц примеси.

Поведение концентрации

Поведение системы определяется величинами τ , t_1 и σ , которые, в свою очередь, определяют следующие характерные времена:

$$\tilde{\tau}_1 = \tau \left(\frac{\tau}{t_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \ \tilde{\tau}_2 = \frac{\tau}{\sigma}, \ \tilde{\tau}_3 = \frac{t_1}{\sigma^{1/\alpha}}.$$
(6.41)

смысл которых будет разъяснен ниже.

Ниже мы рассмотрим четыре случая различающихся с точки зрения режимов переноса: А) сильная и сравнительно медленная сорбция $\sigma \ll 1$, $\tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \ll t_1 \ll \tau$; Б) медленная и умеренно сильная сорбция $t_1 \ll \tau$, $\sigma \ll 1$, $t_1 \ll \tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$; В) быстрая и умеренно сильная сорбция $\tau \ll t_1$, $\sigma \ll 1$, $\tau \ll \tau_1 \sigma$; Г) слабая и медленная сорбция $\sigma \gg 1$, $\tau \gg t_1$, $\tau \gg \sigma t_1$. Обоснование возможности реализаций каждого случая будут даны ниже.

А. Сильная и сравнительно медленная сорбция, $\sigma << 1, \tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} << t_1 << \tau$

Характерные времена (6.41) в порядке возрастания располагаются следующим образом

$$t_1 << \tilde{\tau}_1 << \tilde{\tau}_2 << \tilde{\tau}_3 \,.$$

На малых временах,

 $t <\!\! < \! t_1,$

уход примеси в ловушки несущественен и, учитывая начальные условия (6.39), (6.40), получаем из (6.37) и (6.38):

$$N \cong N_0 \tag{6.42}$$

$$M \cong N_0 \frac{t}{\tau} \tag{6.43}$$

Пренебрегая в уравнении (6.32) уходом примеси в ловушки и обменом между раствором и коллоидами, получаем уравнение для концентрации растворенной компоненты примеси

$$\partial_t c + \vec{\nabla} (\vec{v}c) = 0 \tag{6.44}$$

Решение данного уравнения при условии, что поле скоростей адвекции обладает корреляционными свойствами (2.6), дается выражениями, полученными в главе 2. Именно, концентрация примеси, усредненная по ансамблю реализаций среды, $\overline{c}(\vec{r},t) = \langle c(\vec{r},t) \rangle$ выражается через начальное распределение примеси (6.34) с помощью выражения

$$\overline{c}\left(\overline{r},t\right) = \int d^{3}r' G_{1}\left(\overline{r}-\overline{r}',t\right)c_{0}\left(\overline{r}'\right),$$
(6.45)

где $G_1(\vec{r} - \vec{r}', t)$ есть усредненная функция Грина задачи (6.44), (2.6). Вкратце напомним ее основные свойства. Данная функция Грина может быть представлена в виде (см. главу 2)

$$G_{1}(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p(1+\varphi(\eta))}, \quad \text{Re}\,b > 0\,,$$
(6.46)

где p и \vec{k} есть переменные Лапласа и Фурье, соответственно, а η есть автомодельная переменная:

$$\eta = k^2 \left(\frac{p}{Va^h}\right)^{-\frac{2}{1+h}}.$$
(6.47)

Согласно (6.46) и (6.47) функцию Грина можно представить в виде

$$G_1(\vec{r},t) = \frac{1}{R(t)^3} \Phi(\zeta), \qquad (6.48)$$

где $\Phi(0) \sim 1$, и $\Phi(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$,

$$\zeta = \frac{r}{R(t)}.\tag{6.49}$$

Из (6.46), (6.48) и (6.47) следует, что размер облака примеси определяется выражением

$$R(t) = R_{\gamma}(t) = (a^{h}Vt)^{\gamma}, \, \text{где } \gamma = \frac{1}{1+h}.$$
(6.50)

Поскольку h < 1, имеем $\gamma > \frac{1}{2}$, и, следовательно, G_1 соответствует супердиффузионному режиму переноса.

На временах, когда размер облака примеси значительно превышает его начальный размер, имеем

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) \cong N_0 G_1\left(\vec{r},t\right) \tag{6.51}$$

Здесь начало координат выбрано внутри области начальной локализации примеси

Из уравнения (6.33) имеем

$$\partial_t m + \vec{\nabla} \left(\vec{v} m \right) = \tau^{-1} c \tag{6.52}$$

Откуда следует следующее выражение для средней концентрации примеси, адсорбированной на коллоидах $\overline{m} = <m>$

$$\overline{m}(\vec{r},t) \cong \frac{t}{\tau} \overline{c}(\vec{r},t) = N_0 \frac{t}{\tau} G_1(\vec{r},t)$$
(6.53)

В следующем интервале времени,

$$t_1 << t << \tilde{\tau}_1,$$

уход растворенной примеси в ловушки становится существенным, но вклад обменного члена в баланс растворенной концентрации все еще пренебрежимо мал. Поэтому вместо (6.37) имеем

$$\partial_t \left(1 + \hat{\pi} \right) N = 0 \tag{6.54}$$

откуда получаем выражение для полного количества примеси в растворе

$$N \cong \frac{N_0}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\alpha} \tag{6.55}$$

Воспользовавшись (6.38) и (6.55), приходим к соотношению

$$M \cong \frac{N_0}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_1}\right)^{1-\alpha}$$
(6.56)

которое показывает, что по сравнению с предыдущим интервалом времени, рост количества адсорбированной на коллоидах примеси замедляется.

Из (6.56) также видно, что в случае, когда существенно действие ловушек, величина $\tilde{\tau}_1$ характеризует время адсорбции примеси на коллоидах.

Теперь, с учетом действия ловушек, уравнение (6.32) для концентрации в растворе принимает вид

$$\partial_t \hat{\pi} c + \hat{\nabla} (\vec{v} c) = 0 \tag{6.57}$$

Аналогично, как и в случае уравнения (6.44), для усредненной по ансамблю реализаций среды концентрации в данном случае справедливо прежнее соотношение

(6.45), в котором, однако функцию G_1 следует заменить на новую функцию Грина, G_2 , уравнения (6.57). Из сравнения (6.57) с (6.44) нетрудно видеть, что G_2 может быть получена из G_1 (6.46) с помощью замены (см., также, главу 4):

$$p \to p \,\pi\big(p\big) \tag{6.58}$$

в формулах (6.46), (6.47), где $\pi(p)$ есть Лаплас образ ядра $\varphi(t)$, определяемый соотношением

$$\pi(p) = (pt_1)^{-\alpha}, \quad p < t_1^{-1}.$$
 (6.59)

В результате выражение для функции Грина в этом случае принимает вид

$$G_{2}(\vec{r},t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}+pt}}{p\pi(p)(1+\varphi(\vec{\eta}))}, \quad \text{Re}\, b > 0\,, \tag{6.60}$$

где новая автомодельная переменная $\overline{\eta}$ есть

$$\overline{\eta} = k^2 \left(\frac{p\pi(p)}{Va^h}\right)^{-\frac{2}{1+h}}.$$
(6.61)

Принимая во внимание соотношение (6.55), описывающее убывание общего числа частиц в растворе, новую функцию Грина можно представить в виде

$$G_{2}(\vec{r},t) = \frac{N(t)}{N_{0}} \frac{1}{R(t)^{3}} \Psi(\zeta), \qquad (6.62)$$

где $\Psi(\zeta)$ обладает свойствами, аналогичными $\Phi(\zeta)$: $\Psi(0) \sim 1$, и $\Psi(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Размер облака примеси теперь при $t >> t_1$ определяется выражением

$$R(t) = R_{\beta}(t) = \left(a^{h}Vt_{1}^{\alpha}t^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1+h}},$$
(6.63)

Отсюда следует, что показатель степени, определяющий зависимость от времени размера облака примеси $R_{\beta} \propto t^{\beta}$ есть

$$\beta = \frac{1 - \alpha}{1 + h}.\tag{6.64}$$

Таким образом, в зависимости от соотношения между *h* и α , перенос может происходить как в режиме супердиффузии $\beta > \frac{1}{2}$, так и субдиффузии, $\beta < \frac{1}{2}$.

Принимая это во внимание, из (6.57) следует выражение для пространственного распределения концентрации в растворе

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) \cong N_0 G_2\left(\vec{r},t\right),\tag{6.65}$$

Для адсорбированной компоненты справедливо выражение (6.52). Принимая во внимание, что теперь размер облака растворенной примеси (6.63) много меньше размера облака адсорбированной примеси (6.50) ($R_{\beta}(t) \ll R_{\gamma}(t)$ при $t \gg t_1$), мы можем рассматривать источник в правой части (6.52) как точечный, и для распределения концентрации \overline{m} можем написать

$$\overline{m} = \frac{1}{\tau} \int_{0}^{t} dt' G_{1}(\vec{r}, t - t') N(t')$$
(6.66)

где N(t) определяется выражением (6.55). Выражение (6.66) описывает супердиффузионный режим переноса с источником, зависящим от времени.

Перейдем к интервалу

 $\tilde{\tau}_1 << t << \tilde{\tau}_2.$

Из выражения (6.56) следует, что при $t \approx \tilde{\tau}_1$ имеем

$$M \cong N_0 \tag{6.67}$$

И следовательно количество примеси в растворе существенно меньше N_0 но больше σM , так как равновесие между адсорбированной и растворенной фазами еще не установилось:

$$\sigma N_0 < N << N_0 \tag{6.68}$$

Отсюда следует, что мы можем пренебречь первым слагаемым в правой части (6.33). С другой стороны согласно условию $t \ll \tau/\sigma$ мы можем пренебречь вторым слагаемым в правой части (6.33) по сравнению $\partial_t m$. В итоге перенос адсорбированной компоненты описывается уравнением

$$\partial_t m + \vec{\nabla} (\vec{v}m) = 0 \tag{6.69}$$

с начальным размером облака $R(\tau_1) << R(t)$ и полным количеством примеси приблизительно равным N_0 . Это позволяет считать начальное распределение концентрации для уравнения (6.69) точечным, и, следовательно, справедливо следующее выражение для концентрации адсорбированной компоненты

$$\overline{m}(\vec{r},t) \cong N_0 G_1(\vec{r},t) \tag{6.70}$$

Для растворенной фракции оценка главных членов в уравнении (6.32) дает

$$\left(\partial_t \hat{\pi} + \tau^{-1}\right)c + \vec{\nabla}\left(\vec{v}c\right) = 0 \tag{6.71}$$

откуда следует приближенное распределение концентрации

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) \cong \frac{N}{R_{\gamma}^{3}(\tau)} \Phi\left(\zeta_{\tau}\right)$$
(6.72)

где функция $\Phi(\zeta)$ введена в (6.48), и $\zeta_{\tau} = r/R_{\gamma}(\tau)$.

На временах <u> $t >> \tilde{\tau}_2$ </u> растворенная и адсорбированная компоненты находятся практически в равновесии, что и определяет смысл времени $\tilde{\tau}_2$. Справедливы приближенные равенства

$$N \cong \sigma M \tag{6.73}$$

$$c \cong \sigma m \tag{6.74}$$

Складывая (6.32) и (6.33), и воспользовавшись (6.74), получаем выражение для концентрации адсорбированной компоненты

$$\partial_t \left(1 + \hat{\vec{\pi}} \right) m + \vec{\nabla} \left(\vec{v} m \right) = 0 \tag{6.75}$$

где оператор $\hat{\tilde{\pi}}$ получается из $\hat{\pi}$ заменой t_1 на $\tilde{\tau}_3$ (время $\tilde{\tau}_3$ определено в (6.41)):

$$\hat{\tilde{\pi}} = \sigma \,\hat{\pi} = \hat{\pi} \Big|_{t_1 \to \tilde{t}_3} \tag{6.76}$$

В интервале времени

 $\tilde{\tau}_2 <\!\!< t <\!\!< \tilde{\tau}_3$

the вклад производной по времени ∂_t больше, чем вклад обменного оператора $\partial_t \hat{\pi}$ и уравнение для поглощенной компоненты концентрации принимает вид (6.69). Таким образом, режим переноса описывается соотношениями (6.70), (6.74), а полное количество компонент примеси – формулами (6.67) и (6.73).

На очень больших временах,

 $t >> \tilde{\tau}_3,$

уравнение (6.75) принимает вид

$$\partial_t \left(\hat{\tilde{\pi}} m \right) + \vec{\nabla} \left(\vec{v} m \right) = 0 \tag{6.77}$$

так что распределение адсорбированной компоненты описывается равенством

$$\overline{m}(\vec{r},t) = N_0 \tilde{G}_2(\vec{r},t) \tag{6.78}$$

где функция Грина \tilde{G}_2 равна G_2 в которой t_1 заменено на $\tilde{\tau}_3$:

$$\tilde{G}_2 = G_2 \Big|_{t_1 \to \tilde{\tau}_3} \tag{6.79}$$

Отсюда следует, что $\tilde{\tau}_3$ определяет диапазон времени, на котором становится существенным окончательный уход примеси с коллоидов в ловушки, что и определяет режим переноса.

Облако примеси растет согласно

$$R(t) = \tilde{R}_{\beta}(t) = R_{\beta}(t) \left(\frac{\tilde{\tau}_{3}}{t_{1}}\right)^{\frac{\alpha}{1+h}}$$
(6.80)

Выражение для концентрации растворенной компоненты следует из (6.74).

Полное количество примеси на коллоидах на этих временах определяется выражением

$$M = \frac{N_0}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\tilde{\tau}_3}{t}\right)^{\alpha}$$
(6.81)

и равенством (6.73).

Зависимость полного количества примеси и размера облака примеси от времени изображены на Рис. 6.2.



Рис. 6.2. Зависимости от времени полного числа частиц (а) и размера облака примеси (б) для сильной и сравнительно медленной сорбции, $\sigma \ll 1$, $\tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \ll t_1 \ll \tau$. Сплошная линия - примесь, адсорбированная на коллоидах, пунктир – примесь в растворе.

Б. Медленная и умеренно сильная сорбция, $t_1 \ll \tau$, $\sigma < 1$, $t_1 \ll \tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$

Характерные времена располагаются в следующем порядке:

$$t_1 << \tau, \tilde{\tau}_3 << \tilde{\tau}_2 << \tilde{\tau}_1.$$

На малых временах,

$t << t_1,$

действие ловушек пренебрежимо мало и практически вся примесь остается в растворе, так что полное число частиц определяется выражениями (6.42) и (6.43). Распределение концентрации (6.51) и (6.53) определяются супердиффузионной функцией Грина (6.46).

В следующем интервале,

$t_1 << t << \tau_2,$

действие ловушек приводит к уменьшению количества примеси в растворе (выражение (6.55)) и замедлению роста количества адсорбированной примеси (выражение (6.56)).

Распределение концентрации примеси в растворе описывается функцией Грина, соответствующей случайной адвекции с ловушками, (6.65)), а распределение концентрации адсорбированной компоненты – случайной адвекцией с эффективным стоком, зависящим от времени (6.66).

На временах

$$\tilde{\tau}_2 <\!\!< t <\!\!< \tilde{\tau}_1$$

устанавливается равновесие между растворенной и адсорбирванной компонентами, формула (6.73), где количество адсорбированной на коллоидах примеси много меньше N_0 , формула (6.81).

медленной и умеренно сильной сорбции, $t_1 << \tau$, $\sigma < 1$, $t_1 << \tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$.

Поведение концентрации в растворе описывается формулой (6.65), а выражение для адсорбированной компоненты принимает вид

$$\overline{m} \cong \frac{N_C(t)}{R_{\gamma}^3(\tau/\sigma)} \Phi\left(\zeta_{\tau/\sigma}\right)$$
(6.82)

где M(t) определяется из (6.56) и $\zeta_{\tau/\sigma} = r/R_{\gamma}(\tau/\sigma)$.

На больших временах,

$$t >> \tilde{\tau}_1,$$

главным механизмом, определяющим перенос, является случайная адвекция, десорбция примеси с поверхности коллоидных частиц и их окончательный уход в ловушки. Для полного количества справедливы выражения (6.73) и (6.81). Распределение концентрации определяется формулами (6.74) и (6.78).

Рисунок 6.3 схематически описывает поведение числа частиц и размер облака примеси для данного случая.

В. Быстрая и умеренно сильная сорбция, $\tau \ll t_1$, $\sigma < 1$, $\tau < t_1 \sigma$

Характерные времена, определяющие перенос, располагаются в следующем порядке

$$\tau \ll \tilde{\tau}_3$$
.

На временах

 $t <\!\!< \tau\,,$

количество растворенной примеси остается практически неизменным во времени $N \cong N_0$ и ее перенос происходит в режиме случайной адвекции, так что концентрация описывается выражением (6.51). Количество адсорбированной примеси растет линейно со временем согласно (6.43) и поведение концентрации этой компоненты определяется формулой (6.53).





Рис. 6.3. Зависимости от времени полного числа частиц (а) и размера облака примеси (б) для медленной и умеренно сильной сорбции, $t_1 << \tau$, $\sigma < 1$, $t_1 << \tau \sigma^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$. Сплошная линия - примесь, адсорбированная на коллоидах, пунктир – примесь в растворе.

На временах

 $t >> \tau$,

имеет место равновесие между растворенной и адсорбированной компонентами, (6.73), где $M \cong N_0$ остается справедливым вплоть до времен порядка $\tilde{\tau}_3$. После чего, при $t >> \tilde{\tau}_3$, полное число частиц убывает согласно (6.81).



Рис. 6.4 Зависимости от времени полного числа частиц (а) и размера облака примеси (б) для быстрой и умеренно сильной сорбции, $\tau \ll t_1$, $\sigma \ll 1$, $\tau \ll t_1\sigma$. Сплошная линия - примесь, адсорбированная на коллоидах, пунктир – примесь в растворе.

Распределение концентрации при

$\tau << t << \tilde{\tau}_3$

(включая интервал $t_1 \ll t \ll \tilde{\tau}_3$) описывается супердиффузионной функцией Грина (6.70), (6.74).

И только на временах

 $t >> \tilde{\tau}_3$

растворение и окончательный уход примеси в ловушки становится существенным, так что справедливы соотношения (6.78) и (6.74).

Поведение примеси в случае В показано на Рис. 6.4.

```
Г. Слабая и медленная сорбция \sigma > 1, \tau >> t_1, \tau > \sigma t_1
```

Порядок расположения характерных времен имеет следующий вид

$$\tilde{\tau}_3 <\!\!<\!\!t_1 <\!\!< \tilde{\tau}_2 <\!\!< \!\!\tau <\!\!< \tilde{\tau}_1.$$

На малых временах,

 $t << t_1,$

примесь остается преимущественно в растворе $N \cong N_0$, и только малая часть ее адсорбирована на коллоидах (6.43). Перенос определяется случайной адвекцией и происходит в режиме супердиффузии, выражения (6.51) и (6.53).

В интервале

 $t_1 << t << \tilde{\tau}_2$

количество растворенной примеси начинает уменьшаться в основном за счет ухода в ловушки, (6.55), а рост количества адсорбированной примеси, соответственно, замедляется, (6.56).

Режим переноса растворенной компоненты определяется одновременно случайной адвекцией и уходом в стоки (6.65), а перенос адсорбированной компоненты происходит в режиме супердиффузии с зависящим от времен источником (6.66). Здесь возникает еще одно характерное время

$$\tilde{\tau}_4 = \frac{\tilde{\tau}_1}{\sigma^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{6.83}$$

так что $~\tilde{\tau}_2 < \tilde{\tau}_4 < \tilde{\tau}_1$. В интервале времени

$$\tilde{\tau}_2 < t < \tilde{\tau}_4$$

количество примеси как в растворе, так и на коллоидах уменьшается согласно (6.55), причем $M \cong N/\sigma$. Режим переноса в растворе остается тем же, что и в предыдущем временном интервале, (6.65). Для переноса адсорбированной компоненты справедливо выражение (6.82).

Окончательный режим формируется на временах

$$t > \tilde{\tau}_4$$
.

На этих временах устанавливается равновесие между компонентами: $M \cong N/\sigma$, $\overline{m} \cong \overline{c}/\sigma$. Режим переноса определяется выражением (6.65), соответствующим супер либо субдиффузии. Таким образом, в этом случае перенос полностью определяется поведением примеси в растворе. Максимальное количество примеси на коллоидах достигается на временах $t_{\text{max}} \sim \tilde{\tau}_2$ и приблизительно составляет $M \approx N_0 \left(\frac{\tilde{\tau}_3}{\tilde{\tau}_2}\right)^{\alpha} << N_0$.







t(sec)

Рис. 6.5 Зависимости от времени полного числа частиц (а) и размера облака примеси (б) для слабой и медленной сорбции, $\sigma > 1$, $\tau >> t_1$, $\tau > \sigma t_1$. Сплошная линия - примесь, адсорбированная на коллоидах, пунктир – примесь в растворе.

Обсудим возможность реализации рассмотренных случаев А-Г. Для этого нам надо оценить, в каком диапазоне лежат значения параметров t_1 , τ и σ .

Размеры колодных частиц ρ варьируются в диапазоне от 10^{-3} до 10^{-6} см. Учитывая, что объемная доля коллоидов в трещинах должна быть много меньше единицы, будем считать, что $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ % лежит в диапазоне от нуля до 10^{-2} . Коэффициенты диффузии можно оценить как $D \approx 3 \times 10^{-7}$ см²/сек, и $d \approx 10^{-8}$ см²/сек. Параметр ξ определяется равенством химических потенциалов растворенной и адсорбированной примесей и может изменяться в широком диапазоне. Значения величин t_1 , τ и σ в модельных расчетах (рисунки 6.2-6.5)были получены на основе формул (6.107), (6.111) (см. приложение) используя следующие значения: А) $\rho \approx 6 \times 10^{-4}$ см, $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ % $\approx 3 \times 10^{-3}$, $\xi \approx 0, 2$ см⁻¹, $a \approx 6 \times 10^{-4}$ см; Б) $\rho \approx 6 \times 10^{-4}$ см,

$$\frac{4}{3}\pi\rho^{3} \approx 3 \times 10^{-4}, \quad \xi \approx 0,2 \quad \text{cm}^{-1}, \quad a \approx 6 \times 10^{-4} \quad \text{cm}; \quad \text{B}) \quad \rho \approx 10^{-4} \quad \text{cm}, \quad \frac{4}{3}\pi\rho^{3} \approx 3 \times 10^{-3}, \quad \xi \approx 10^{-4} \quad \text{cm}, \quad \frac{4}{3}\pi\rho^{3} \approx 3 \times 10^{-3}, \quad \xi \approx 20 \quad \text{cm}^{-1}, \quad a \approx 6 \times 10^{-4} \quad \text{cm}.$$

Поведение концентрации на асимптотически больших расстояниях

Асимптотическое поведение концентрации на расстояниях много больших основного облака примеси можно описать с точностью до предэкспоненциального множителя

$$\overline{c}(r,t) \propto \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp\left(-\Pi\left(p;r,t\right)\right)$$
(6.84)

где

$$\Pi\left(p;r,t\right) = \frac{r}{R\left(1/p\right)} - pt \tag{6.85}$$

и, как обычно, функция R(t) обозначает размер облака примеси, зависящий от времени $R(t) \propto t^{\varepsilon}$, где ε зависит от временного интервала и компоненты примеси (выражения (6.50), (6.63), (6.80)). Аналогичные выражения справедливы для $\overline{m}(\vec{r}, t)$.

Интеграл в (6.84) вычисляется методом перевала, так что перевальная точка есть

$$p_* = \frac{1}{t} \left(\varepsilon \frac{r}{R(t)} \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$
(6.86)

Это приводит к асимптотике концентрации в виде

$$\overline{c}(r,t) \propto \exp(-\Pi) \tag{6.87}$$

где

$$\Pi \equiv \Pi \left(p_*; r, t \right) = \left(1 - \varepsilon \right) \left(\varepsilon \frac{r}{R(t)} \right)^{\frac{1}{1 - \varepsilon}}$$
(6.88)

Как видно из (6.86) по мере увеличения расстояния *r* растет значение перевальной точки. Поэтому, с учетом (6.86), мы приходим к выводу, что чем более

далекие расстояния рассматриваются при фиксированном времени, тем более ранний режим определяет асимптотику. Причиной этого является то, что только часть примеси, не взаимодействовавшей с ловушками, может достичь больших расстояний. Это в равной степени относится к примеси в растворе и на коллоидах. Поэтому структура хвостов будет многоступенчатой, если имеет место смена режимов переноса во времени. То есть с увеличением расстояния асимптотика концентраций воспроизводит режимы переноса в обратном порядке.

В качестве примера рассмотрим распределение концентрации в растворе на асимптотически больших расстояниях для случая A на временах $t >> \tilde{\tau}_3$.

В пространственном интервале

$$\tilde{R}_{\beta}(t) << r << R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{3}}\right)^{\frac{h}{1+h}}$$

асимптотика концентрации растворенной примеси соответствует текущему временному интервалу и определяется выражением

$$\overline{c}(r,t) \propto \exp\left(-A\zeta^{1/(1-\beta)}\right) \tag{6.89}$$

где константа A порядка единицы и $R(t) = \tilde{R}_2(t)$.

На расстояниях

$$R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{3}}\right)^{\frac{h}{1+h}} << r << R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{2}}\right)^{\frac{h}{1+h}}$$

асимптотика концентрации описывается формулой

$$\overline{c}\left(\vec{r},t\right) \propto \exp\left(-A'\zeta^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)$$
(6.90)

где константа A' также порядка единицы и $R(t) = R_1(t)$.

В следующем пространственном интервале

$$R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{2}}\right)^{\frac{h}{1+h}} << r << R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{1}}\right)^{\frac{h}{1+h}} \left(\frac{t_{1}}{\tau}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+h)}}$$

для распределения концентрации справедливо

$$\overline{c} \propto \exp\left(-\frac{r}{R_{\rm I}(\tau)}\right)$$

где *N* лежит в диапазоне (6.68).

На расстояниях

$$R_{\gamma}\left(t\right) \cdot \left(\frac{t}{\tilde{\tau}_{1}}\right)^{\frac{h}{1+h}} \left(\frac{t_{1}}{\tau}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1+h)}} << r << R_{\gamma}\left(t\right) \cdot \left(\frac{t}{t_{1}}\right)^{\frac{h}{1+h}}$$

участок концентрационного хвоста описывается выражением (6.89) с $R(t) = R_{\beta}(t)$

На самых больших расстояниях

$$r >> R_{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{h}{1+h}}$$

асимптотика концентрации описывается формулой (6.90).

6.3 Статистически однородные двупористые среды

Перейдем к описанию режимов переноса в статистически однородных двупористых средах при наличии коллоидов.

Процессы, определяющие динамику системы в этом случае те же, что и в предыдущих случаях. Именно, 1) перенос растворенной примеси и коллоидных частиц по хорошо проницаемой подсистеме пор (или трещин), 2) адсорбция/десорбция растворенной примеси на поверхности коллоидных частиц, 3) обмен растворенной примесью между «быстрой» подсистемой и пористыми блоками, в которые (ввиду их низкой проницаемости) возможна только диффузия растворенной примеси, но не коллоидов. В итоге, поведение системы описывается следующей системой уравнений для усредненных по объему концентраций растворенной примеси \overline{c} и примеси, адсорбированной на коллоидах \overline{m} :

$$\partial_t \overline{c} + \nabla \left(\vec{u} \, \overline{c} - D_s \nabla \overline{c} \right) = -Q - \tau^{-1} \left(\overline{c} - \sigma \overline{m} \right), \tag{6.91}$$

$$\partial_{t}\overline{m} + \nabla \left(\vec{u}\,\overline{m} - D_{c}\nabla\overline{m} \right) = \tau^{-1} \left(\overline{c} - \sigma\overline{m} \right) \tag{6.92}$$

где наряду с обозначениями предыдущего раздела введены средняя скорость адвекции \vec{u} , и коэффициенты дисперсии примеси в растворе, D_s , и коллоидных частиц, D_c . В силу того, что при больших числах Пекле $Pe = \frac{bu}{d} >> 1$ (здесь u есть модуль средней скорости, b есть характерный размер пористых блоков, d - молекулярный коэффициент диффузии), дисперсия определяется гидродинамическими флуктуациями $D_{\alpha} = D \approx ub$, в дальнейшем мы считаем $D_s = D_c = D$. Обмен примесью с пористыми блоками Q в правой части () определяется свойствами функции памяти, введенной и описанной в главе 5. Решается задача с начальными условиями

$$c(\vec{r},t=0) = N_0 \delta(\vec{r}), \quad m(\vec{r},t=0) = 0.$$
 (6.93)

Режимы переноса будем описывать зависимостью от времени полного числа частиц, адсорбированных на коллоидах, среднего смешения и продольной и поперечной дисперсии этих частиц.

Как и в случае регулярно неоднородных и фрактальных сред, поведение системы зависит от соотношения между характерными временами t_a , τ , t_a , t_b и параметром σ . Проанализируем наиболее интересный случай сильной, $\sigma \ll 1$, но не слишком быстрой, $t_a \ll \tau \ll t_b$, сорбции, так что выполняются следующие неравенства:

$$\sigma\tau \ll t_a, \ t_a \ll t_b \sigma^2. \tag{6.94}$$

Здесь возникают два новых характерных времени

$$\tau_1 = \frac{\tau^2}{t_a} \times \tau_2 = \frac{t_a}{\sigma^2}, \tag{6.95}$$

так что с учетом (6.94) имеем

$$t_a << \tau << \tau_1 << \tau_2 << t_b$$
 .

Расчеты приводят к следующей последовательности режимов переноса.

1) $t << t_a$. На этих временах почти вся примесь находится в растворе и лишь малая часть

$$M \approx N_0 \frac{t}{\tau} \tag{6.96}$$

сосредоточена на коллоидах. Действие ловушек еще пренебрежимо мало, так что среднее смещение и дисперсия описываются классическими выражениями

$$\langle r_{\parallel} \rangle = ut, \quad \sigma_{\perp}^2 = 2\sigma_{\parallel}^2 = 4Dt .$$
 (6.97)

t_a << t << τ₁. В этом интервале процесс адсорбции примеси на коллоидах замедляется,

$$M \approx N_0 \sqrt{\frac{t}{\tau_1}}, \qquad (6.98)$$

что обусловлено взаимодействием примеси с ловушками. Видно, что теперь время τ_1 характеризует процесс осаждения. Принимая во внимание, что коллоиды с ловушками не взаимодействуют, среднее смещение и дисперсия по-прежнему описываются выражениями (6.97).

3) τ₁ << t << τ₂. На этих временах практически вся примесь оказывается сосредоточенной на коллоидах:

$$M(t) \approx N_0. \tag{6.99}$$

Отсюда видно, что в присутствии ловушек именно время τ_1 является временем установления равновесия между растворенной и адсорбированной фазами. Как и в предыдущем случае, перенос описывается выражениями (6.97).

4) $\tau_2 \ll t \ll t_b$. В этом интервале становится существенным процесс десорбции с последующим уходом примеси в пористые блоки (ловушки). Полное количество примеси на коллоидах уменьшается со временем согласно

$$M(t) \approx N_0 \sqrt{\frac{\tau_2}{t}}, \qquad (6.100)$$

а среднее смещение и продольная дисперсия описываются выражениями

$$\left\langle r_{\parallel} \right\rangle \approx \sqrt{\sigma_{\parallel}^2} \approx \sqrt{D_{eff}t} , \qquad (6.101)$$

что соответствует режиму квазидиффузии. Поперечная дисперсия описывается субдиффузионным законом

$$\sigma_{\perp}^2 \approx 2D\sqrt{\tau_2 t} . \tag{6.102}$$
Отметим, что по сравнению с обычной квазидиффузией (см. главу 1), эффективный коэффициент увеличивается в σ^{-1} раз.

5) $t >> t_b$. На этих временах ловушки (пористые блоки) насыщаются примесью и устанавливается равновесие между примесью в трещинах и матрице. В результате количество примеси на коллоидах остается постоянным во времени

$$M(t) \approx \frac{N_0}{\sigma} \sqrt{\frac{t_a}{t_b}}, \qquad (6.103)$$

а среднее смещение и дисперсия определяются классическими выражениями, но с перенормированными константами

$$\langle r_{\parallel} \rangle \approx \tilde{u}t, \quad \sigma_{\alpha}^2 \approx 2\tilde{D}t, \quad \tilde{u} = u\sqrt{\frac{\tau_2}{t_b}}, \quad \tilde{D} = D\sqrt{\frac{\tau_2}{t_b}}.$$
 (6.104)

Для сравнения рассмотрим случай, когда для характерных параметров выполняются следующие соотношения

$$\sigma \ll 1, \quad t_a \ll \tau \ll t_b \quad \sigma \tau \ll t_a, \quad \sigma^2 t_b \ll t_a. \tag{6.105}$$

В этом случае характерные времена располагаются в следующем порядке

$$t_a <\!\!< \!\tau <\!\!< \!\tau_1 <\!\!< \!t_b <\!\!< \!\tau_2 \,,$$

и изменения касаются только последнего интервала.

На временах *t* >> *t_b* наступает насыщение матрицы и уходом примеси в матрицу можно пренебречь ввиду малой емкости матрицы по срвнению с емкостью коллоидной подсистемы. В результате почти вся примесь оказывается сосредоточенной на коллоидах (6.99) и переносится вместе с ними согласно зависимостям (6.97).

Приложение

Для оценки скорости обмена примеси между раствором и адсорбирующими коллоидами воспользуемся газовым приближением (см., например, [83]). Именно, если среднее расстояние между коллоидами $\aleph^{-1/3}$ много больше их характерных размеров ρ , $\aleph^{-1/3} >> \rho$, диффузионный поток примеси на сферическую коллоидную частицу с характерным радиусом ρ можно оценить из стационарного решения уравнения для

микроскопической, не усредненной концентрации \tilde{c} с использованием граничных условий $\tilde{c}(r = \aleph^{-1/3}) = c$ и $\tilde{c}(r = \rho) = c_b$. Здесь c_b - концентрация растворенной примеси вблизи поверхности коллоидной частицы, определяемая равновесием с адсорбированной компонентой; начало координат выбрано в центре частицы, и $r = |\vec{r}|$. В итоге выражение для плотности потока на единицу поверхности частицы есть $j = D_m (c - c_b) / \rho$. Умножая это выражение на площадь одной коллоидной частицы и на их концентрацию, для объемной плотности стока примеси получаем выражение

$$q = (c - c_h)/\tau , \qquad (6.106)$$

где т определяется как

$$\tau \approx \left(4\pi D_m \rho \,\aleph\right)^{-1}.\tag{6.107}$$

Отметим также, что если скорость адсорбции определяется граничной кинетикой на поверхности коллоидных частиц, вид выражения (6.106) остается прежним, меняется только выражение для τ .

Мы рассмотрим случай, когда концентрация примеси c_{ad} , адсорбированной на поверхности коллоидных частиц, много меньше концентрации насыщения. В этом случае можно считать, что концентрация примеси в растворе вблизи адсорбирующей поверхности коллоидной частицы линейно зависит от c_{ad} [74]:

$$c_b = \zeta c_{ad} \tag{6.108}$$

Тогда, учитывая соотношение между поверхностной концентрацией адсорбированных частиц c_{ad} и *m*:

$$m \cong 4\pi \rho^2 c_{ad} \aleph \tag{6.109}$$

нетрудно получить связь между концентрацией примеси в растворе вблизи поверхности коллоидов c_b и средней концентрации примеси, сорбированной на поверхности коллоидов:

$$c_b = \sigma m \tag{6.110}$$

где

$$\sigma \approx \frac{\zeta}{4\pi\rho^2 \aleph}.$$
(6.111)

Если средняя концентрация в растворе c равна c_b , то есть примесь во всем объеме раствора находится в равновесии с адсорбированной примесью, то соотношение

$$c = \sigma m, \tag{6.112}$$

есть не что иное, как линейная изотерма, и σ связана с коэффициентом распределения K_{dc} очевидным образом:

$$\sigma = \left(\rho_c K_{dc}\right)^{-1}.\tag{6.113}$$

Если равновесие во всем объеме отсутствует, подстановка (6.110) в (6.106) приводит к окончательному выражению для стока:

$$Q = (c - \sigma m) / \tau. \tag{6.114}$$

Таким образом, из формул (6.107) и (6.111) следует, что как время установления равновесия τ , так и константа равновесия σ зависят и от концентрации, и от размеров коллоидных частиц. Поэтому одной массовой плотности коллоидов недостаточно для того, чтобы характеризовать свойства системы. Формулы (6.107) и (6.111) дают приближенное описание параметров τ и σ , и в случае если распределение коллоидов по размерам достаточно узкое вблизи среднего размера ρ . Следует, однако, отметить, что сама система уравнений (6.1), (6.5) и (6.3) не зависит от конкретного вида выражений для τ и σ .

ГЛАВА 7

ПЕРЕНОС В РЕГУЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

Проблема переноса пассивной примеси при развитой конвекции Рэлея-Бенара в слое жидкости, нагреваемом снизу, привлекает внимание исследователей вот уже несколько десятилетий. Данные процессы исследуются как для слоя свободной жидкости, так и для насыщенных пористых сред, и представляют как чисто теоретический интерес (ускорение переноса в периодической системе ячеек с замкнутыми течениями), так и практическую важность. Например, конвекция Рэлея-Бенара может возникать в геологическом слое над глубинными подземными захоронениями РАО, что обусловлено остаточным тепловыделением РАО, и интерес представляет влияния возникающих течений на перенос загрязнений в геологической среде.

Тип конвективного течения в слое свободной жидкости и в насыщенной пористой среде во многом схожи и зависят от значения числа Рэлея R. Определение R для этих двух случаев несколько различаются. Для слоя свободной жидкости число Рэлея определяется как $R = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\chi V}$, где g есть ускорение свободного падения, β - температурный коэффициент расширения, ΔT - перепад температуры между нижней и верхней поверхностями слоя, H - толщина слоя, χ - температуропроводность, v - вязкость жидкости. Для слоя пористой среды имеем $R' = \frac{g\beta\Delta TkH}{\chi V}$. В данном случае число Рэлея наряду с вышеперечисленными параметрами, зависит от проницаемости пористой среды k.

При малых числах Рэлея жидкость остается неподвижной, так что теплоперенос определяется чистой теплопроводностью (по жидкости или по жидкости и по остову), а перенос примеси – молекулярной диффузией в растворе.

Начиная с некоторого критического значения, R_1 , состояние покоя жидкости становится неустойчивым. Данное значение для свободной жидкости приблизительно равно $R_1 \approx 1700$ и определяется геометрией слоя и граничными условиями. Для

насыщенной пористой среды $R'_1 = 4\pi^2$. В результате, при $R > R_1$, формируются конвективные ячейки, способствующие более интенсивному переносу тепла от нижней к верхней поверхности слоя. В зависимости от геометрии слоя, условий на границах слоя, числа Прандля исследуемой жидкости, зависимости вязкости жидкости от температуры, степени влияния на процесс поверхностного натяжения, возможно развитие ячеек двух типов [84]: 1) роллов (или валов), и 2) гексагональных ячеек (ниже ГЯ). Движение жидкости в таких ячейках (а следовательно, и адвекция примеси) происходит вдоль замкнутых линий тока, на масштабах порядка толщины слоя. Тем не менее, формирование таких устойчивых периодически расположенных замкнутых ячеек приводит к интенсификации переноса примеси в плоскости слоя.

При дальнейшем увеличении числа Рэлея течение начинает флуктуировать, сохраняя в среднем замкнутый характер (как и для стационарного течения) в отдельных ячейках. Имеются экспериментальные исследования флуктуации РБ течения в случае цепочки роллов для свободной жидкости [85]. Флуктуации замкнутых циркулирующих течений в пористых средах исследовались с помощью ячеек Хеле-шоу [86] для одного вихря. В работе [85] было указано, что для слоя свободной жидкости флуктуационный режим начинается при $R_2 \approx 19R_1$. При еще больших значениях числа Рэлея движение жидкости переходит в турбулентный режим. Флуктуации течения в ГЯ качественно описаны в [84].

Если в жидкости имеется примесь, то возникающие течения могут приводить к интенсификации переноса этой примеси вдоль слоя. Перенос примеси в условиях РБ конвекции активно исследовался экспериментально и теоретически для слоя свободной жидкости (см. [87] и указанную там литературу). Основное внимание исследователей уделялось переносу в условиях устойчивого течения в виде цепочки роллов (на границе между двумя роллами). Было показано, что существует характерное время τ_1 , так что на временах больше τ_1 перенос вдоль цепочки роллов (в направлении перпендикулярном их оси) описывается классической диффузией с эффективным коэффициентом диффузии

$$D_{eff} \approx d\sqrt{Pe}$$
 (7.1)

где *d* есть молекулярный коэффициент диффузии примеси в растворе, а $Pe = \frac{VH}{d}$ есть число Пекле, определенное по характерной скорости течения жидкости в периферических слоях роллов. Вдоль оси роллов перенос, естественно, определяется молекулярной диффузией. На временах меньше τ_1 , было предположено (см. [88]), что перенос описывается неклассической закономерностью, так что дисперсия примеси вдоль цепочки растет согласно $\sigma^2 \sim t^{\gamma}$ с $\gamma < 1$. Согласно результатам работы [88], в случае со свободной жидкостью для показателя следует ожидать $\gamma = 2/3$. Для проверки этого был проведен эксперимент, в котором исследовался перенос растворенной примеси в цепочке вихрей [87]. Эти вихри создавались пропусканием электрического тока через жидкость, помещенную в пространственно модулированной магнитное поле. Результаты подтвердили, что имеет место интервал времени, в течение которого перенос происходит в неклассическом (субдиффузионном) режиме. Однако, на наш взгляд, ввиду указанной экспериментальной постановки и согласно приведенным данным (см. Рис. 6 работы [87]) невозможно окончательно сделать вывод о том, что закон $\sigma^2 \sim t^{2/3}$ описывает перенос примеси вдоль цепочки роллов перенос тока черенос неренос растворениения и согласно приведенным данным (см. Рис. 6 работы [87]) невозможно окончательно сделать вывод о том, что

В работе [85] экспериментально исследован перенос примеси в интервале чисел Рэлея, когда течение в слое свободной жидкости становится флуктуирующим, при том, что средняя во времени структура течения (роллы) сохраняется. Были измерены характеристики течения и эффективный коэффициент диффузии примеси. Для описания увеличения коэффициента диффузии здесь же была предложена численная модель, основанная на том, что флуктуации нарушают замкнутый характер периферийных трубок тока. Это, в свою очередь, должно приводить к более интенсивному (чем вследствие молекулярной диффузиии) переходу частиц примеси из одной ячейки в соседнюю.

Что касается переноса в условиях РБ конвекции в пористых средах, то здесь следует отметить теоретическую работу [89], в которой на основе скейлинговых соотношений для миграции одной частицы предсказывается также наличие двух интервалов времени, так что на больших временах справедлива классическая диффузия с характерным коэффициентом (7.1), а на малых временах – субдиффузия с показателем $\gamma = 1/2$.

Перенос в условиях развитой системы ГЯ (как для свободной жидкости, так и для пористых сред) экспериментально, по-видимому, не исследовался. Следует отметить указанное в работе [44] утверждение, что в этом случае следует ожидать гораздо меньшего увеличения коэффициента диффузии, а именно $D_{eff} \approx d \ln Pe$.

Целью данной работы является построение модели двойной пористости (МДР) для описания переноса пассивной примеси при развитии конвекции РБ как для свободной жидкости, так и для насыщенных пористых сред. Следует подчеркнуть, что применение МДР не связано с наличием в среде различных типов пористости. Термин двупористость означает наличие двух различных подсистем частиц, определяемых структурой течения. Учитывая, что структура течения с точки зрения предлагаемой модели для обоих случаев одинакова, результаты будут в равной степени применимы как для свободной жидкости, так и для течения в пористой среде.

Далее глава имеет следующую структуру. В разделе 7.1 будет рассмотрен перенос примеси в цепочке роллов, для значений чисел Рэлея, когда течение жидкости в цепочке устойчиво. Будет предложена модель и рассмотрены режимы переноса. Будет также описано поведение примеси на асимптотически больших расстояниях от источника. В разделе 7.2 на базе развитой модели будет проанализирован перенос, при значениях чисел Рэлея в диапазоне, когда имеют место существенные флуктуации скорости течения, но при этом среднее поле скоростей течения сохраняет вид замкнутых течений (роллов). В следующем разделе проанализирован процесс переноса примеси в периодической системе ГЯ. В разделе 7.4 рассмотрено возможное влияние на перенос примеси флуктуаций течения в ячейках Бенара. В разделе 7.5 данная модель применена к описанию переноса макроскопических частиц, подчиняющихся Броуновскому движению. В заключительном разделе приведены краткие выводы главы.

7.1 Перенос примеси вдоль стационарной цепочки роллов

Рассмотрим перенос примеси в условиях развитого конвективного течения в виде периодической цепочки роллов. Нас будет интересовать перенос в направлении вдоль цепочки (вдоль оси роллов имеет место обычная диффузия с коэффициентом *d*). Миграция частиц примеси обусловлено двумя факторами: 1) адвекцией вдоль замкнутых внутри каждого ролла линий тока и 2) диффузии поперек линий тока (см.

Рис. 7.1). Переносом за счет диффузии вдоль линии тока мы пренебрегаем по сравнению с адвекцией.

Естественно полагать, что линии тока с максимальной скоростью (обозначим ее через V) находятся вблизи периферии ролла [88]. Точное их расположение зависит от граничных условий, но для нашей модели это не существенно. Важно, однако, что эти линии тока проходят в непосредственной близости от границы двух роллов.

Проходя вдоль вертикальной границы двух соседних роллов (от точки 1 до точки 2 на Рис. 7.1), частица может в результате диффузии перейти из одного ролла в соседний.



Рис. 7.1. Структура конвективного течения для периодической цепочки роллов.

Время прохождения частицы вдоль границы двух роллов (из точки 1 в точку 2 на Рис. 7.1) составляет

$$\tau_c \approx H/V \tag{7.2}$$

Оно определяет характерную толщину пограничного слоя (трубки тока на периферии ролла) *w*, из которого частица может перейти в соседнюю ячейку. Так как время диффузии на расстояние *w* есть

$$\tau_d \approx w^2 / d , \qquad (7.3)$$

то приравнивая характерные времена $\tau_d \approx \tau_c$, получаем

$$w \approx \sqrt{d\tau_c} \approx \sqrt{\frac{dH}{V}} = H \cdot P e^{-\frac{1}{2}}.$$
 (7.4)

Здесь $Pe = \frac{HV}{d}$ есть введенное выше число Пекле. Интерес представляет случай $Pe \gg 1$, который мы и рассматриваем, поэтому $w \ll H$.

Процесс перехода в соседний ролл является случайным. Частица в результате диффузии может как пересечь границу, так и остаться в исходном ролле. В последнем случае в процессе движения вдоль трубки тока она может остаться в пограничной трубке тока толщиной *w*, либо в результате диффузии уйти вглубь ролла. В данной работе рассматривается случай, когда верхняя и нижняя поверхности слоя являются непроницаемыми. Оставшиеся в пограничной трубке тока частицы переносятся к противоположной границе. У противоположной границы двух роллов частицы примеси могут, опять-таки случайным образом, перейти в соседний ролл.

В итоге, на масштабах существенно превышающих размеры ролла H частицы, находящиеся в трубках тока пограничного слоя толщиной w, совершают хаотические скачки влево и вправо на расстояние равное размеру ролла с частотой τ_c^{-1} . Это может быть описано как процесс одномерной (вдоль цепочки роллов) диффузии с коэффициентом

$$D \approx H^2 / \tau_c \,. \tag{7.5}$$

Частицы примеси, находящиеся во внутренних областях роллов вне слоя толщины *w*, непосредственно не участвуют в переносе примеси между роллами. В этом смысле внутренние области роллов являются ловушками. Обмен между пограничной трубкой тока и внутренней областью ролла определяется диффузией с коэффициентом диффузии *d* примеси в радиальном направлении.

Таким образом, в слое, занимаемом роллами, можно выделить две подобласти: 1) совокупность пограничных слоев толщиной *w* в роллах, и 2) совокупность внутренних областей роллов. Частицы в области 1 совершают замкнутые (на масштабах радиуса роллов) движения и случайные перескоки между соседними роллами. Движение частиц во внутренних областях ограниченно масштабами ролла, и для того, чтобы перейти в соседний ролл, они должны перейти в область 1.

Поэтому при анализе переноса примеси по цепочке роллов можно воспользоваться моделью, аналогичной неравновесной модели «двойной пористости», развитой в главе 5 применительно к описанию переноса растворенной примеси в геологических средах.

В рамках данной модели вся совокупность частиц примеси разбивается на две подсистемы: 1) подсистему частиц, сосредоточенных в пограничных слоях роллов толщиной *w*, и 2) подсистему частиц во внутренних областях роллов. Для концентрации *c* частиц в первой подсистеме (в дальнейшем будем называть их активными частицами) на временах, когда размер облака примеси существенно превосходит размер ролла, справедливо одномерное уравнение переноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -Q.$$
(7.6)

Здесь *D* есть коэффициент диффузии, определяемый соотношением (7.5), а *Q* описывает обмен примесью между подсистемой 1 и ловушками.

Будем решать задачу с начальным условием

$$c\Big|_{t=0} = c_0(x),$$
 (7.7)

что соответствует тому, что в начальный момент примесь сосредоточена в подсистеме 1 (например, сконцентрирована вблизи нижней поверхности слоя)

Нас будут интересовать режимы переноса, которые будем описывать двумя величинами: полным количеством активных частиц

$$N(t) = \int c(x,t) dx, \qquad (7.8)$$

и дисперсией примеси вдоль оси x:

$$\sigma^{2} = N^{-1} \int x^{2} c(x,t) dx \,. \tag{7.9}$$

В дальнейшем нам будет удобно перейти в представление Фурье-Лапласа, так что Фурье-Лаплас образ концентрации определяется как

$$c_{p,k} = \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x,t) \exp(-pt - ikx) dt dx.$$
(7.10)

Отметим, что в этом представлении величины (7.8) и (7.9) выражаются через нулевую Фурье-гармонику образа концентрации

$$N(t) = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} c_{p,k} \Big|_{k=0} \exp(pt) \frac{dp}{2\pi i}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \qquad (7.11)$$

$$\sigma^{2}(t) = -N^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\partial^{2} c_{p,k}}{\partial k^{2}} \bigg|_{k=0} \exp(pt) \frac{dp}{2\pi i}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$
(7.12)

В представлении Фурье-Лапласа решение уравнения (7.6) принимает вид

$$c_{p,k} = c_{0k} \left(p + \Lambda_p + Dk^2 \right)^{-1},$$
(7.13)

где c_{0k} есть Фурье образ начального распределения $c_0(x)$, а Λ_p есть так называемая функция памяти, определяемая из соотношения $Q_{p,k} = \Lambda_p c_{p,k}$.

Для определения Q(x,t) решается задача диффузии примеси внутри области 2 ограниченной условной поверхностью, разделяющей области 1 и 2 внутри одного ролла. Уравнение диффузии для концентрации *n* во внутренней области 2 имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = d\Delta n \,. \tag{7.14}$$

Кроме того, должны выполняться граничные условия: 1) равенство концентраций c и n на поверхности раздела пограничного слоя и внутренней области, и 2) ограниченности концентрации внутри области 2. Как указано выше, мы рассматриваем времена, когда характерный размер облака примеси много больше размеров ролла. Поэтому в первом граничном условии концентрацию c можно считать постоянной вдоль поверхности раздела подобластей 1 и 2 внутри одного ролла, хотя, конечно, и зависящей от времени.

В начальный момент времени примесь во внутренних областях роллов отсутствует: $n\Big|_{t=0} = 0$.

Из решения данной задачи, находим поток примеси из области 1 во внутреннюю область одного ролла: $J = \oint (-d\nabla n) \Big|_S dS$, где *S* означает поверхность, отделяющая пограничный слой 1 от внутренней области ролла 2. Поделив *J* на объем одного ролла, получаем *Q*.

Аналогично, как и в главе 5, для Λ_p получаем следующие асимптотики

$$\Lambda_{p} \approx \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{\tau_{d}}}, & p\tau_{H} \gg 1, \\ p \sqrt{\frac{\tau_{H}}{\tau_{d}}}, & p\tau_{H} \ll 1. \end{cases}$$

$$(7.15)$$

Здесь введено новое характерное время

$$\tau_H = \frac{H^2}{d}.$$
(7.16)

Данная величина определяет время, в течение которого выравнивается концентрация на масштабах одного ролла.

Подстановка решения (7.13) с учетом (7.15) в (7.11) и (7.12) позволяет получить следующие режимы переноса примеси в системе.

В диапазоне времен $\tau_d \ll t \ll \tau_H$, когда асимптотика функции памяти дается первым выражением (7.15), имеет место режим субдиффузии. Именно, число активных частиц примеси и их дисперсия описываются зависимостями

$$N(t) \cong N_0 \sqrt{\frac{\tau_d}{\pi t}} , \qquad (7.17)$$

$$\sigma^2(t) \cong 2D\sqrt{\pi\tau_d t} . \tag{7.18}$$

Таким образом, размер облака примеси растет со временем пропорционально $t^{1/4}$.

Здесь и далее
$$N_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} c_0(x) dx$$
.

Подставляя выражение для D (7.5) и $\tau_d = \tau_c = \frac{H}{V}$, приходим к следующим выражениям

$$N(t) \cong N_0 \sqrt{\frac{H}{\pi V t}}, \qquad (7.19)$$

$$\sigma^2(t) \cong 2HV \sqrt{\pi \frac{H}{V}t} \,. \tag{7.20}$$

Таким образом, в данном временном интервале реализуется неклассический, субдиффузионный режим, существование которого качественно подтверждается результатами работы [87].

На больших временах, $t >> \tau_{H}$, количество активных частиц становится постоянным

$$N(t) \cong N_0 \sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H}}, \qquad (7.21)$$

и реализуется режим классической диффузии с эффективным коэффициентом диффузии

$$D_{eff} \cong D_{\sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H}}},$$
 (7.22)

так что

$$\sigma^2 \cong 2D_{eff}t \,. \tag{7.23}$$

Учитывая, что $\sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H}} = \frac{w}{H} \cong \sqrt{Pe}$, для эффективного коэффициента диффузии

приходим к формуле

$$D_{eff} \approx d\sqrt{Pe}$$
, (7.24)

полученной, как указано во введении, в рамках других моделей (см. [90] и указанную там литературу).

Отметим, также, что эффективный коэффициент диффузии равен коэффициенту диффузии активных частиц D, умноженному на долю объема ими занимаемую $\frac{w}{H}$:

$$D_{eff} \cong D\frac{W}{H}.$$
(7.25)

На Рис. 7.2 изображено поведение дисперсии примеси от времени



Рис. 7.2. Схематическое изображение зависимости дисперсии частиц примеси от времени в цепочке роллов.

В рамках развитой модели можно также получить оценку для концентрации примеси на расстояниях много больше размера облака примеси: $x >> \sqrt{\sigma^2}$. Для этого выполним обратное Фурье-Лаплас преобразование по формуле

$$c(x,t) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{p,k} \exp(pt + ikx) \frac{dk}{2\pi} \frac{dp}{2\pi i}, \quad \text{Re}\,\alpha > 0.$$
(7.26)

Интегрирование (7.26) по волновому вектору определяется вычетом в точке $k_0 = i \sqrt{\frac{p + \Lambda_p}{D}}$ (для определенности рассматриваем область x > 0). После этого интеграл по переменной Лапласа оцениваем методом перевала.

В итоге в диапазоне времен $\tau_d << t << \tau_H$ хвост концентрации при $x >> \sqrt{2\pi D \sqrt{\tau_d t}}$ имеет вид

$$c(x,t) \approx \frac{N_0}{\sqrt{Dt}} \left(\frac{\tau_d}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} 2^{-\frac{5}{3}} \exp\left(-3\left(\frac{\eta}{4}\right)^{\frac{4}{3}}\right),$$
(7.27)

где
$$\eta = \frac{x}{D^{1/2} (\tau_d t)^{1/4}}$$
. Следует подчеркнуть, что в силу того, что модель применима на

временах $t >> \tau_d$, данное выражение справедливо только на расстояниях $x << \sqrt{\frac{D}{\tau_d}t}$.

На временах $t >> \tau_H$ хвост концентрации становится двухступенчатым и описывается выражением

$$c(x,t) \approx N_0 \sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H}} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{eff}t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{eff}t}\right) \operatorname{при} \sqrt{D_{eff}t} << x << \sqrt{D} \sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H^3}}t$$
(7.28)
и выражением (7.27) при $\sqrt{D} \sqrt{\frac{\tau_d}{\tau_H^3}}t << x << \sqrt{\frac{D}{\tau_d}}t$.

7.2 Флуктуирующая цепочка роллов

При увеличении числа Рэлея течение начинает флуктуировать. В работе [8] проводились эксперименты в диапазоне чисел Рэлея от $R/R_1 = 19$ (когда начинались временные флуктуации в ячейках) до $R/R_1 = 32$ и было показано следующее. Поле скоростей, усредненное по времени на интервалах много больших времен флуктуаций, сохраняет вид характерный для картины устойчивого конвективного течения в цепочке роллов. В частности течение в периферической области роллов имеет вид замкнутых трубок тока. Флуктуации скорости характеризовались периодом τ_f и амплитудой Δv . Флуктуации скорости измерялись как для вертикальной компоненты скорости (в различных точках внутри ролла), так и для горизонтальной. В последнем случае измерялась скорость границы ячеек. Из представленных в [85] результатов следует, что характерные амплитуды флуктуаций для обеих компонент были одного порядка, и в проведенных экспериментах лежали в диапазоне от 5 до 15% от значений скорости течения в периферической области роллов.

Из описанной экспериментальной картины течения следует, что в данном диапазоне чисел Рэлея можно также применить развитую выше модель «двойной пористости». Отличие от стационарного случая состоит в том, что вместо коэффициента молекулярной диффузии d в формулах для τ_d , τ_H и числа Пекле следует использовать эффективный коэффициент диффузии, определяемый флуктуациями скорости:

$$\tilde{d} \approx \left(\Delta \nu\right)^2 \tau_f \,. \tag{7.29}$$

В частности, замена d на \tilde{d} в формуле (7.24) для эффективного коэффициента диффузии приводит к выражению

$$D_{eff} \approx \sqrt{HV\tilde{d}} \approx \Delta v \sqrt{HV\tau_f} , \qquad (7.30)$$

откуда в явном виде следует, что эффективный коэффициент диффузии растет линейно с амплитудой флуктуации скорости Δv . Данная зависимость согласуется с результатами, полученными в [85] (см. Рис. 5 работы [84]).

Подставляя данные работы [85], $H \sim 1 \text{ см}$, $V \sim 0,1 \text{ см/c}$, $\tau_f \sim 10 \text{ c}$, $\Delta v \sim 10^{-2} \text{ см/c}$, получаем оценку для эффективного коэффициента диффузии $D_{eff} \sim 10^{-2} \text{ сm}^2/\text{c}$, что неплохо согласуется с экспериментальной величиной $D_{eff} \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ сm}^2/\text{c}$.

Таким образом, можно утверждать, что в интервале чисел Рэлея, $19 < R/R_{cr} < 32$, перенос примеси по цепочке роллов описывается классической диффузией с эффективным коэффициентом диффузии \tilde{D}_{eff} , определенном в (7.30). Аналогично как и в случае стационарной РБ конвекции данный режим имеет место при $t >> \tilde{\tau}_{H} = \frac{H^{2}}{\tilde{d}}$. На временах $\tau_{c} << t << \tilde{\tau}_{H}$ следует ожидать режим субдиффузии типа (7.20). К сожалению экспериментальных данных для этого случая нет.

Отметим, что в работе [85] для оценки \tilde{D}_{eff} была предложена численная модель, в которой \tilde{D}_{eff} определялась на основе усреднения движения отдельных частиц. Движение отдельных частиц описывалось модельной функцией тока, имеющей вид $\psi \sim \sin \left\{ k \left[x + B \sin \left(\frac{2\pi}{\tau_f} t \right) \right] \right\} W(z)$. Здесь z есть координата, направленная вверх, функция W(z) удовлетворяет соответствующим граничным условиям на верхней и нижней границах слоя, а *B* определяет амплитуду флуктуаций скорости (см., также, [2]). Видно, что как и в нашей модели, те же самые экспериментально определяемые параметры (τ_f и Δv) используются для определения движения частиц.

7.3 Эффективный коэффициент диффузии при переносе по системе гексагональных ячеек

Рассмотрим применение модели двойной пористости для описания переноса по системе ГЯ. В данном разделе мы рассматриваем времена $t >> \tau_H$, где τ_H определяется по высоте ГЯ равной H. На этих временах концентрация примеси на масштабе одной ГЯ приблизительно постоянна. Аналогично, как и в случае цепочки роллов можно попробовать выделить группу активных частиц, совершающих прыжки из одной ГЯ в другую и приводящих к эффективной диффузии примеси с увеличенным коэффициентом диффузии.

Рассмотрим частицу, движущуюся вдоль замкнутой пограничной трубки тока. Как следует из картины течения, переход примеси из одной замкнутой пограничной трубки тока в другую пограничную трубку может происходить в двух качественно различных местах (см. Рис. 7.3.): 1) из пограничной трубки тока одной ГЯ в пограничную трубку тока другой ГЯ (точка A на Рис. 7.3.), и 2) из пограничной трубки тока одной ГЯ (точка G на Рис. 7.3.). ГЯ (точка B Рис. 7.3).



Рис. 7.3. Линии тока при развитой конвекции в виде периодической системы гексагональных ячеек.

Условие обоих переходов является, как и прежде, равенством двух времен: а) времени диффузионного преодоления поперечного сечения трубки тока, и б) времени пролета $\tau_c \approx \frac{H}{V}$ вдоль пограничной области. Полагая, что скорость течения вдоль замкнутой трубки тока меняется слабо, из сохранения потока для несжимаемой жидкости имеем, что толщина трубки тока на периферии *w* и в центре *W* ЯБ связаны соотношением

$$W \approx \sqrt{2Hw} \gg w. \tag{7.31}$$

Поэтому процессом, определяющим скорость перескоков частицы на расстояния порядка *H*, является диффузия частицы на толщину погрантрубки в центре ГЯ за время:

$$\tilde{\tau}_d \approx \frac{W^2}{d}.\tag{7.32}$$

Равенство $\tilde{\tau}_d \approx \tau_c$ дает оценку на толщину трубки тока в центре ЯБ, содержащей активные частицы:

$$W \approx \sqrt{\frac{dH}{V}}$$
 (7.33)

Учитывая, что доля активных частиц приблизительно есть $\frac{W^2}{H^2}$, аналогично

формуле (7.25) (в которой надо $\frac{w}{H}$ заменить на $\frac{W^2}{H^2}$) получаем

$$D_{eff} \approx D \frac{W^2}{H^2} \approx HV \frac{dH}{V} \frac{1}{H^2} = d.$$
(7.34)

Таким образом, в нулевом приближении наличие конвективных течений не приводит к ускорению диффузии в системе.

При более тщательном анализе, легко заметить, что в отличие от случая роллов частицы, не принадлежащие рассмотренной пограничной трубке тока, вообще говоря, не являются пассивными. Действительно, рассмотрим частицы принадлежащие трубкам тока, отстоящим от центра ЯБ на расстояние \tilde{W} , такие что

$$W < \tilde{W} < W_1, \tag{7.35}$$

где

$$W_1 \approx 2H \left(\frac{d}{HV}\right)^{\frac{1}{4}}.$$
(7.36)

Нетрудно видеть, что в силу правого неравенства условия (7.35) на временах $t > \tau_c$ частицы, принадлежащие этим трубкам тока, обобществляются между трубками тока двух секторов соседних ГЯ, показанных на Рис. 7.4, *OBC* и *O'BC*, так что среднее по времени положение этих частиц соответствует точке *A*.

Как следует из геометрии гексагональных ЯБ, диффузия частиц в плоскости, показанной на Рис. 7.4, может привести к переходу из одного сектора (*OBC*) в соседний (*OCF*) в пределах одной ЯБ. Рассмотрим систему частиц, принадлежащих совокупности трубок тока, граница которых отстоит от центра ЯБ (точки *O*) на расстояние \tilde{W} . Характерное время, необходимое для перехода частицы из одного сектора в другой определяется средней толщиной данных секторов, которое с точностью до числа определяется \tilde{W} . Это дает оценку

$$\tau_w \approx \frac{\tilde{W}^2}{d}.\tag{7.37}$$



Рис. 7.4. Иллюстрация к процессу перехода частиц между секторами одной ГЯ.

После перехода в соседний сектор *OBF* среднее положение частицы с учетом условия (7.35) соответствует уже точке *A*'. То есть за время τ_w частица совершает скачок на расстояние $\frac{\pi}{3}H \approx H$. В итоге для частиц, принадлежащих совокупности трубок тока, характеризуемых \tilde{W} , можно приписать эффективный коэффициент диффузии $D_w \approx \frac{H^2}{\tau_w}$. Соответственно, средний коэффициент диффузии для всех частиц есть

$$D_{eff} \approx \int_{W}^{W_{1}} D_{W} \frac{2\tilde{W}d\tilde{W}}{H^{2}} \approx 2d \int_{W}^{W_{1}} \frac{d\tilde{W}}{\tilde{W}} \approx \frac{d}{2} \ln Pe , \qquad (7.38)$$

что с точностью до 1/2 совпадает с оценкой указанной А.М. Дыхне (см. [44]). В силу приближений модели, данное различие, по-видимому, не существенно.

7.4 Влияние флуктуаций на перенос по системе гексагональных ячеек

С увеличением числа Рэлея течение в ГЯ начинает флуктуировать. К сожалению, экспериментально данный вопрос исследован не так подробно как для роллов, поэтому в данном случае для описания усиления переноса можно рассмотреть лишь качественную оценку. Как и в предыдущем разделе, мы рассматриваем времена $t >> \tau_H$. В соответствии с данными [84], нарушение регулярного течения касается в первую очередь области вблизи центра ГЯ. На Рис. 7.5 приведена иллюстрация эволюции течения в этом случае, взятая из работы [84]. Будем считать, что данные флуктуации затрагивают область с радиусом порядка l, и характерное время перемешивания жидкости в этой области составляет τ_l . В случае если l лежит в диапазоне $W \ll l \ll W_1$, то можно считать, что доля активных частиц составляет

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{l^2}{H^2},\tag{7.39}$$

причем в силу условия *l* << *W*₁ среднее положение активной частицы до скачка определяется точкой *A* (Рис. 7.4). Перемешивание в центральной области в результате гидродинамических флуктуаций происходит гораздо быстрее, чем вследствие молекулярной диффузии, поэтому естественно положить

$$\tau_l \ll \frac{l^2}{d} \,. \tag{7.40}$$

В результате перемешивания в центральной области ЯБ частицы будут переходить в другие сектора ЯБ, что, тем самым, приводит к их скачкам в точки A', то есть на расстояния порядка H. Таким образом, парциальный коэффициент диффузии для активных частиц будет

$$D_l \approx \frac{H^2}{\tau_l},\tag{7.41}$$

а эффективный коэффициент диффузии в данном случае определиться выражением

$$D_{eff} = D_l \frac{\Delta N}{N} \approx \frac{H^2}{\tau_l} \frac{l^2}{H^2} = \frac{l^2}{\tau_l}, \qquad (7.42)$$

откуда в силу условия (7.40) имее
м $D_{\scriptscriptstyle e\!f\!f} >> d$.

Если *l* окажется больше W_1 (условие $l \ll W_1$ не выполняется), то оценка парциального коэффициента диффузии (7.41) справедлива только для доли частиц $\frac{\Delta N'}{N} \approx \frac{W_1^2}{H^2}$ (вместо (7.39)). В итоге для эффективного коэффициента имеем

$$D_{eff} \approx \frac{W_1^2}{\tau_l}.$$
(7.43)



Рис. 7.5 Качественная картина флуктуаций течения в системе гексагональных ячеек. Точка O соответствует центру ГЯ. $t_2 > t_1$.

7.5 Применение модели к описанию переноса макроскопических частиц

Развитая модель также может быть применена к случаю, когда роль примеси играют макроскопические броуновские частицы. Как для случая свободной жидкости,

так и насыщенной пористой среды основное изменение модели состоит в подстановке вместо d нового коэффициента диффузии d^* . Выражение для d^* можно написать исходя из соотношения Эйнштейна для связи подвижности броуновской частицы с ее коэффициентом диффузии и формулы Стокса для подвижности макрочастицы радиуса R в жидкой среде:

$$d^* = \frac{k_B T}{6\pi\rho_i v R},\tag{7.44}$$

где T есть температура жидкости, k_{B} - константа Больцмана, ρ_{l} - плотность, ν - вязкость жидкости.

Условие применимости модели состоит в том, что отличие скорости движения частицы от локальной скорости жидкости δV , обусловленное архимедовой силой, $\delta V \approx \frac{2R^2g}{9\nu} \frac{\rho_l - \rho_p}{\rho_l}$, где ρ_p – плотность вещества частицы, должно быть много меньше самой скорости. Это приводит к следующему критерию

$$\frac{2R^2g}{9vV}\frac{\rho_l - \rho_p}{\rho_l} << 1.$$
(7.45)

Если это условие выполнено, то для цепочки роллов миграция частиц описывается следующим образом. Для случая стационарного течения (раздел 7.1) на временах $\tau_c \ll t \ll \tau_H^*$, где $\tau_H^* = \frac{H^2}{d^*} \gg \tau_H$, имеет место субдиффузия, которая описывается, как и раньше, соотношением (7.20). На временах $t \gg \tau_H^*$ перенос описывается классической диффузией, так что

$$\sigma^2 = 2D_{eff}^* t , \qquad (7.46)$$

где

$$D_{eff}^* = d^* \sqrt{Pe^*}$$
, (7.47)

 $Pe^* = \frac{VH}{d^*}$. Отсюда легко видеть, что

$$D_{eff}^* \sim \sqrt{d^*} \sim \frac{1}{\sqrt{R}}.$$
(7.48)

Для случая флуктуирующей цепочки роллов коэффициент диффузии частиц d^* (и, следовательно, R) не входят в формулы модели. Однако размер частиц может влиять на параметры переноса (например, \tilde{D}_{eff}) через величины Δv и τ_f , которые в нашей модели находятся из эксперимента.

Аналогично для переноса частиц по решетке гексагональных ячеек эффективный коэффициент диффузии при устойчивом течении описывается выражением (7.38). Для случая флуктуирующих ячеек выражения (7.42) и (7.43) справедливы, где l и τ_l должны быть определены из эксперимента, а величина W_1

должна быть заменена на
$$W_1^* = 2H\left(\frac{d^*}{HV}\right)^{\frac{1}{4}}$$
.

Для переноса макроскопических частиц в насыщенных пористых средах справедливы все указанные выше выводы, если размер частиц много меньше характерной апертуры каналов пористой среды по которым происходит просачивание.

7.6 Обсуждение и выводы

В данной главе рассмотрен перенос примеси в условиях развитой конвекции Рэлея-Бенара в слое жидкости, нагреваемой снизу. Показано, что в силу геометрии формирующегося течения всю совокупность частиц примеси можно разбить на подсистемы, обладающие разными свойствами с точки зрения переноса. Именно, можно выделить а) подсистему активных частиц, принадлежащих погранслоям формирующихся замкнутых течений, и способных быстро перемещаться от одной ячейки к другой, и б) подсистему пассивных частиц, занимающих внутренние области ячеек, которые играют роль ловушек. Такое разбиение позволяет для описания переноса развить модель типа неравновесной модели двойной пористости. В зависимости от типа установившегося течения (роллы либо гексагональные ячейки) и его стационарности (не зависящее от времени, либо сильно флуктуирующее) перенос примеси может обладать следующими характеристиками.

В случае, когда течение имеет вид стационарной периодической цепочки роллов, имеются два четко определенных временных интервала. В первом (более раннем) интервале, верхняя граница τ_{H} которого определяется временем выравнивания концентрации на масштабах ячейки, перенос происходит в субдиффузионном режиме,

так что размер облака примеси растет пропорционально $t^{1/4}$. Верхняя граница этого временного интервала, τ_H , определяется условием, что на масштабе ячейки концентрация выравнивается. На временах больших τ_H субдиффузионный режим переходит в режим классической диффузии с эффективным коэффициентом $D_{eff} \approx d\sqrt{Pe}$. Получена оценка концентрации примеси на расстояниях много больше размера основного облака (в «хвосте»). В течение первого временного интервала хвост концентрации имеет вид растянутой экспоненты. На поздней стадии хвост становится двухступенчатым. Полученные зависимости справедливы для переноса примеси при конвекции ЯБ как в слое свободной жидкости, так и в насыщенной пористой среде, поскольку активная и пассивная подсистемы имеют в обоих случаях один и тот же вид.

При более высоких значениях чисел Рэлея, в интервале $19 < R/R_{cr} < 32$, согласно [85] течение в роллах становится флуктуирующим, хотя в среднем сохраняет вид замкнутых ячеек. В этом случае развитая модель предсказывает линейный рост эффективного коэффициента диффузии с увеличением амплитуды флуктуаций. Это следует из того, что при наличии флуктуаций скорости с амплитудой Δv и периодом τ_f вместо коэффициента молекулярной диффузии d в формулах модели следует использовать эффективный коэффициент $\tilde{d} \approx (\Delta v)^2 \tau_f$. Эффективный коэффициент диффузии ($\tilde{D}_{eff} \approx \Delta v \sqrt{HV \tau_f}$, где параметры V, Δv , и τ_f должны быть измерены на эксперименте) для этого случая дают неплохое согласие с результатами эксперимента [85].

В периодической решетке гексагональных ячеек, геометрия течения такова, что миграция частиц в активной подсистеме определяется областью вблизи центров ячеек (а не на границе между ячейками). В итоге увеличение эффективного коэффициента диффузии оказывается пропорционально не корню, а логарифму числа Пекле. Однако, в области чисел Рэлея, когда течение в ячейках становится флуктуирующим, увеличение D_{eff} может быть значительным. Данное утверждение следует из экспериментальных данных приведенных в [84], где указано что флуктуации течения будут перемешивать области вблизи центров ГЯ. Вводя характерный размер области перемешивания l и характерное время перемешивания τ_l , были получены выражения

для эффективного коэффициента диффузии $D_{eff} \approx l^2 / \tau_l$ для случая $l \ll H \cdot P e^{-l/4}$, и $D_{eff} \approx H^2 / (\tau_l \sqrt{Pe})$ в обратном пределе.

Все полученные выше результаты для переноса растворенной примеси справедливы как для РБ течения в слое свободной жидкости, так и в насыщенной пористой среде. Но также они применимы и для переноса макроскопических броуновских частиц, при условии, что силы плавучести не приводят к существенному отличию скорости частиц от локальной скорости жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. В рамках простой и обобщенной моделей Дыхне исследованы режимы переноса и связь между этими режимами и асимптотическим поведением концентрации (на расстояниях от источника много больше основной области локализации примеси). Для случая, когда хорошо проницаемая среда имеет вид прямого цилиндра показано, что окончательным всегда является режим медленной классической диффузии, определяемый свойствами слабопроницаемой среды (в отличие от плоскопараллельного слоя, где окончательный режим зависит от соотношения между параметрами среды). Установлено, что для всех режимов асимптотика концентрации имеет экспоненциальный вид. Если с течением времени происходит смена режимов, то асимптотика на поздних временах становится многоступенчатой, так что более далекие ступени определяются более ранними режимами переноса. Эти выводы были нами подтверждены во всех других физических моделях и являются универсальными.

2. Исследованы характеристики процессов переноса в модели случайной адвекции для фрактальных сред с конечной пространственной длиной корреляции и в присутствии динамических флуктуаций поля скоростей адвекции. При достаточно медленном убывании корреляций скорости, на относительно ранних временах перенос происходит в режиме супердиффузии, а на поздних - реализуется режим классической диффузии. На поздних временах, в соответствии с установленной общей закономерностью, концентрационная асимптотика состоит из двух ступеней. Ближняя ступень имеет классическую гауссову форму, а дальняя – форму сжатой экспоненты, отвечающей режиму супердиффузии. Динамические флуктуации скорости адвекции не приводят к изменению выводов стационарной теории.

3. Построена модель случайной адвекции с одноосной анизотропией. Систематика режимов переноса зависит от степени анизотропии. При умеренной анизотропии перенос происходит в супердиффузионном режиме по всем направлениям. При сильной анизотропии, вдоль оси (параллельно средней скорости адвекции) реализуется супердиффузионный режим, а в поперечном направлении – классическая диффузия. В обоих случаях асимптотическое поведение концентрации не является гауссовым ни в одном из направлений. Вдоль оси анизотропии имеет место

аномальный дрейф, так что среднее смещение частиц пропорционально размеру облака примеси в этом направлении и растет со временем по супердиффузионному закону.

4. Развита модель переноса примеси, обусловленного адвекцией и диффузией в перколяционных средах с конечной длиной корреляции, в которых характер переноса определяется как фрактальными свойствами среды, так и наличием ловушек: мертвых концов перколяционного кластера, и окружающей его пористой матрицы. Возникают четыре временных интервала, в каждом из которых указанные факторы проявляются по-своему. На малых временах перенос происходит в режиме супердиффузии, обусловленном адвекцией примеси по остову перколяционного кластера. Далее, вследствие действия ловушек, перенос замедляется, и может реализоваться как супер-, так и субдиффузия. В следующем временном интервале, когда размер облака примеси превосходит корреляционную длину, но ловушки еще не насыщены, в направлении вдоль средней скорости также возможна как супер-, так и субдиффузия, а в поперечном направлении - субдиффузия. На самых поздних временах перенос описывается классической адвекцией-диффузией.

5. Развита модель переноса примеси в статистически однородных двупористых средах. В зависимости от значения характерных времен задачи, и от рассматриваемого временного интервала перенос может быть описан семью различными режимами: классической диффузией, классической адвекцией-диффузией, адвекцией со степенным шлейфом, квазидиффузией, субдиффузией, и двумя типами медленной адвекции. Определены интервалы времени, В течение которых поведение является неклассическим. Указан диапазон параметров задачи, когда на больших временах, в условиях приближенного равновесия между сильно И слабопроницаемыми подсистемами, поведение примеси может отличаться от предсказаний общепринятой равновесной модели. Учет сорбции примеси на поверхности каналов приводит лишь к переопределению характерных времен, оставляя все выводы модели без изменения.

6. Развита модель коллоидно-усиленного переноса примеси в резко контрастных средах трех типов: регулярно-неоднородных, фрактальных и статистически однородных. Наличие коллоидных частиц, адсорбирующих примесь, приводит к временному подавлению действия ловушек, в результате чего усиливается перенос примеси на большие расстояния. В случае сильной сорбции существует интервал времени, в течение которого практически вся примесь оказывается сосредоточенной на коллоидах и переносится вместе с ними. При этом режим переноса определяется типом

среды: для регулярно неоднородных и статистически однородных сред – это дрейф с постоянной скоростью, а для фрактальных сред – супердиффузия. Окончательным режимом на поздних временах становится один из режимов - адвекция-диффузия, субдиффузия или квазидиффузия.

7. Развита модель переноса примеси в условиях конвекции Рэлея-Бенара в слое жидкости, подогреваемой снизу. Характеристики переноса определяются структурой течения (роллы либо гексагональные ячейки) и зависимостью течения от времени. Для стационарной цепочки роллов на ранних временах перенос происходит в субдиффузионном режиме, так что размер облака примеси растет со временем пропорционально $t^{1/4}$. На поздних временах реализуется режим классической диффузии с эффективным коэффициентом, пропорциональным корню из числа Пекле. При больших числах Рэлея, когда течение в роллах флуктуирует, эффективный D_{eff} пропорционален амплитуде флуктуаций скорости. В коэффициент диффузии решетке стационарных гексагональных ячеек эффективный коэффициент диффузии пропорционален логарифму числа Пекле. Когда течение в ячейках становится флуктуирующим, увеличение D_{eff} может быть значительным и определяется характерными временем и размером области перемешивания в центрах гексагональных ячеек. Полученные зависимости справедливы для переноса примеси при конвекции РБ как в слое свободной жидкости, так и в насыщенной пористой среде.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации связаны, в первую очередь, с применением разработанных теоретических моделей к описанию процессов переноса в конкретных геологических средах различного типа, а также с созданием на базе развитых представлений численных кодов.

В заключение пользуюсь случаем принести искреннюю благодарность моему учителю Петру Сергеевичу Кондратенко за постоянный интерес к работе, многочисленные полезные обсуждения и помощь, оказанную им на всех этапах выполнения работы.

Я благодарен Леониду Александровичу Большову за инициирование исследований по данной проблеме, поддержку и конструктивный интерес к работе.

Реализованный в работе подход к научному исследованию во многом был сформирован под влиянием Александра Михайловича Дыхне, которому я искренне благодарен.

Также хочу поблагодарить Михаила Сергеевича Вещунова, общение с которым привело к более глубокому пониманию некоторых важных вопросов.

Отдельные вопросы обсуждались с Ильей Леонидовичем Драниковым, Ольгой Александровной Дворецкой и Владимиром Леонидовичем Клочихиным, за что я им глубоко признателен.

Литература

- Ю.А. Дрейзин, А.М. Дыхне, Аномальная проводимость неоднородных сред в сильном магнитном поле, ЖЭТФ 63, 242 (1972)
- О.Г. Бакунин, Стохастическая неустойчивость и турбулентный перенос. Характерные масштабы, инкременты, коэффициенты диффузии, УФН 185, 271-306 (2015).
- Gu Qing, E.A. Schiff, S. Grebner, F. Wang, R. Schwarz, Non-Gaussian transport measurements and the Einstein relation in amorphous Silicon, Phys. Rev. Lett. 76, 3196 (1996).
- H. Sher, M. Lax, Stochastic transport in disordered solids. I Theory, Phys Rev. B 7, 4491 (1973).
- Л.М. Зеленый, А.В. Милованов, Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики, УФН 174 (8), 809-852 (2004).
- M. Weiss, H. Hashimoto, T. Nilsson, Anomalous protein diffusion in living cells as seen by fluorescence correlation spectroscopy, Biophysical J. 84 (6), 4043-4045 (2003).
- D.S. Banks, C. Fradin, Anomalous diffusion of proteins due to molecular crowding, Biophysical J. 89 (5), 2960-2971 (2005).
- 8. S.P. Neuman, Universal scaling of hydraulic condactivities and dispersivities in geologic media, Water Resources Research **26**(8) 1749-1758 (1990).
- M. Sahimi, Non-linear and non-local transport processes in heterogeneous media: from long-range correlated percolation to fracture and material breakdown, Phys. Rep. 306, 213 (1998).
- J.P. Bouchaud and A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications, Phys. Reports **195** (4&5), 127-293 (1990).

- Bolshov L., Kondratenko P., Pruess K., and Semenov V. Nonclassical Transport Processes in Geologic Media: Review of Field and Laboratory Observations and Basic Physical Concepts. Vadose Zone J. 7 (4), 1135–1144 (2008).
- 12. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman. 1982.
- Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Теория протекания и проводимость сильно неоднородных сред. УФН 117 (3), 401-435 (1975).
- 14. E.W. Montroll, G. Weiss, Random walks on lattices II, J. Math. Phys 6, 167 (1965).
- 15. R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: fractional dynamics approach, Phys. Rep. **339**, 1-77 (2000).
- M. Sahimi, Dispersion in porous media, continuous-time random walks, and percolation, Phys. Rev. E 85 016316 (2012).
- 17. Khintchine A., Levy P. Sur les lois stables. C. R. Acad. Sci. Paris 202, 374 (1936).
- 18. А.С. Монин, Доклады АН СССР 105, 256 (1955).
- 19. V. Balakrishnan, Anomalous diffusion in one dimension, Physica A 132, 569 (1985).
- 20. W. Wyss, The fractional diffusion equation, J. Math. Phys. 27, 2782 (1986).
- Schneider W.R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations. J. Math. Phys. 30, 134 (1989).
- 22. A. Compte, Stochastic foundations of fractional dynamics, Phys. Rev. E 53, 4191 (1966).
- К.В. Чукбар, Стохастический перенос и дробные производные, ЖЭТФ 108, 1875 (1995).
- 24. В.В. Учайкин, Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы, УФН
 173(8), 847-876 (2003).
- 25. D. S. Fisher, Random walks in random environments, Phys. Rev. A 30, 960-964 (1984).
- А.М. Дыхне, А.П. Напартович, Перенос резонансного излучения в неоднородной плазме, Москва, препринт ИАЭ (1970).
- 27. Zh.S. Gevorkian, Yu.E. Lozovik, Classical diffusion in random fields with long-range correlations, J. Phys. A: Math. Gen. **20**, L659 (1987).

- 28. В.Е. Кравцов, И.В. Лернер, В.И. Юдсон, Классическая диффузия в средах со слабым беспорядком, ЖЭТФ **91**, 569 (1989).
- 29. M.W. Deem, Field-theoretic approximations for normal diffusion in random velocity fields, Phys. Rev. E **51**, 4319 (1995).
- J.F. Lutsko, J.P. Boon, Generalized diffusion: A microscopic approach, Phys. Rev. E 77, 051103 (2008).
- J.F. Lutsko, J.P. Boon, Microscopic theory of anomalous diffusion based on particle interactions, Phys. Rev. E 88, 022108 (2013).
- 32. I. Calvo, R. Sanchez, The path integral formulation of fractional Brownian motion for the general Hurst exponent, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 282002 (2008).
- 33. В.И. Кляцкин, Динамика стохастических систем. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- В.И. Кляцкин, Стохастические уравнения глазами физика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- 35. A.M. Dykhne, I.L. Dranikov, P.S. Kondratenko, Anomalous diffusion in regularly non-uniform media, Journal of Hydraulic Research **43**, 2 (2005)
- V.E. Arkhincheev, E.M. Baskin, Anomalous diffusion and drift in a comb model of percolation clusters, Sov. Phys. JETP 73(1), 161-165 (1991).
- O. A. Dvoretskaya, P. S. Kondratenko, Anomalous transport regimes and asymptotic concentration distributions in the presence of advection and diffusion on a comb structure, Phys. Rev. E 79, 041128 (2009).
- 38. H.H. Gerke, and M.T. van Genuchten. A dual-porosity model for simulating the preferential movement of water and solutes in structured porous media. Water Resour. Res. 29, 305-319 (1993).
- 39. J. Simunek, M.Th. van Genuchten, Modeling nonequilibrium flow and transport processes using HYDRUS, Vadose Zone J. **7** (2), 728-797 (2008).
- 40. K. Pruess, The TOUGH Codes: A family of simulation tools for multiphase flow and transport processes in permeable media. Vadose Zone J. **3**, 738-746 (2004).
- D. L. Koch, J. F. Brady, Anomalous diffusion in heterogeneous porous media // Phys. Fluids 31, 965 (1988).

- 42. D. L. Koch, J. F. Brady, Anomalous diffusion due to long-range velocity fluctuations in the absence of a mean flow, Phys. Fluids **1**, 47-51 (1989).
- 43. К.В. Чукбар, Квазидиффузия пассивного скаляра, ЖЭТФ 109(4), 1335-1348 (1996).
- 44. M.B. Isichenko, Percolation, statistical topography, and transport in random media, Rev. Mod. Phys. 64, 961 (1992).
- 45. E. Bonnet, O. Bour, N. E. Odlimg, P. Davy, I. Main, P. Cowie, B. Berkowitz, Scaling of fracture systems in geologic media, Reviews of Geophysics, **39**, 347 (2001).
- 46. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М: Наука, 1975, 256с.
- 47. Ш. Ма, Современная теория критических явлений, Мир, Москва, 1980.
- Matthew W. Becker and Allen M. Shapiro, Tracer Transport in Fractured Crystalline Rock: Evidence of Nondiffusive breakthrough Tailing, Water Resources Research 36 (7), 1677-1686 (2000).
- 49. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, ЖЭТФ 35, 1158 (1958), А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, ЖЭТФ 36, 319 (1959).
- 50. В.М. Финкельберг, Распространение волн в случайной среде. Метод корреляционных групп, ЖЭТФ **53**, 40 (1967).
- А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике. – М.: ИФМЛ, 1963.
- 52. D. ben-Avraham and S. Havlin, *Diffusion and Reaction in Fractals and Disordered Systems* (Cambridge University Press 2000).
- 53. R. A. Guyer, Conductivity fluctuations and the amplitude of the long-time tail Phys. Rev. B 34, 7816 (1986).
- 54. R. A. Guyer, Diffusive motion on a fractal; Gnm(t), Phys. Rev. A 32, 2324 (1985).
- 55. H. E. Roman and M. Giona, Fractional diffusion equation on fractals: threedimentional case and scattering function, J. Phys A **25**, 2107 (1992).
- Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise. Phys. Rev. Lett. 59, 381-384 (1987).

- 57. Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, Phys. Rev. A **38**, 364-374. (1988).
- Vespignani, A., and S. Zapperi. How self-organized criticality works: A unified meanfield picture. Phys. Rev. E 57(6), 6345-6362 (1998).
- 59. Obukhov S. P. The problem of directed percolation, Physica A 101, 145-155 (1980).
- Cardy J. L., Sugar R.L. Directed percolation and Reggeon field theory// J. Phys.A: Math. Gen, 13, L423-L427 (1980).
- Frei E., Täuber U. C., Schwabl F. Crossover from isotropic to directed percolation// Physical Review E 49 (6), 5058-5072 (1994).
- 62. O. A. Dvoretskaya, P. S. Kondratenko, Transport phenomena in sharply contrasting media with a diffusion barrier, J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 465001 (2011).
- 63. П.С. Кондратенко, Частное сообщение
- 64. V. Mendez, D. Campos, J. Fort, Dynamical features of reaction-diffusion fronts in fractals, Phys. Rev. E 69, 016613 (2004).
- 65. В.Д. Борман, А.А. Белогорлов, В.А. Быркин, В.Н. Тронин, В.И. Троян, Переход диспергирования и неэргодичность системы неупорядоченная нанопористая среда-несмачивающая жидкость, ЖЭТФ, т. 144, в. 6, стр. 1290-1318 (2013).
- 66. J. Villermaux, Deformation of chromatographic peaks under the influence of mass transfer phenomena, J. Chromatographic Sci. **12**, 822-831 (1974).
- 67. V. G. Rumynin, Subsurface Solute Transport Models with Application to Groundwater Hydrology, St. Petersburg, Nauka, 2011.
- 68. V. Cvetcovic, A general memory function for modeling mass transfer in groundwater transport, Water Resour. Res. **48**, W04528 (2012).
- 69. M. Willmann, J. Carrera, X. Sanchez-Vila, O. Silva, and M. Dentz, Coupling of mass transfer and reactive transport for non-linear reactions in heterogeneous media, Water Resour. Res. **46**, W07512 (2010).
- R. Haggerty, S. Gorelick, Multiple-rate mass transfer for modeling diffusion and surface reactions in media with pore-scale heterogeneity, Water Resour. Res. 31, 2383-2400 (1995).

- 71. J. Carrera, X. Sanchez-Vila, I. Benet, A. Medina, G. Galarza, and J. Guimera, On matrix diffusion formulations, solution methods and qualitative effects, Hydrogeol. J. 6, 178-190 (1998).
- 72. M. Sahimi, Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing, Rev. Mod. Phys. 65, 1393 (1993).
- 73. J. J. Freid, M. A. Combarnous, Adv. Hydrosci. 7, 169 (1971).
- 74. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика, часть I, Москва, Наука 1995 стр.592.
- 75. J.E. Saiers, G.M. Hornberger, The role of colloidal kaolinite in the transport of cesium through laboratory sand coloumns, Water Resources Res. **32**, 33-41 (1996).
- 76. S.B. Roy, D.A. Dzombak, Sorption nonequilibrium effects on colloid-enhanced transport of hydrophobic organic compounds in porous media, J. Contam. Hydrol. 30, 179-200 (1998).
- 77. B.R. Magee, L.W. Lion, A.T. Lambley, Transport of dissolved organic macromolecules and their effect on the transport of phenantrene in porous media, Environ. Sci. Technol. 25, 323-331 (1991).
- 78. C.G. Enfield, G. Bengtsson, Macromolecular transport of hydrophobic contaminants in aqueous environments, Ground Water **26**, 64-70 (1988).
- 79. W.B. Mills, S. Liu, F.K. Fong, Literature-review and model (Comet) for colloid metals transport in porous media, Ground Water **29**, 199-208 (1991).
- 80. A. Abdel-Salam, C.V. Chrysikopoulos, Analysis of a model for contaminant transport in fractured media in the presence of colloids, J. Hydrol. **165**, 261-281 (1995).
- P.A. Smith, C. Degueldre, Colloid-facilitated transport of radionuclides through fractured media, J. Contam. Hydrol. 13, 143-166 (1993).
- Y. Corapcioglu, S. Jiang, Colloid-facilitated groundwater contaminant transport, Water Resources Res. 29, 2215-2226 (1993).
- 83. Е. М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Физическая кинетика, Москва, Наука 1979.
- 84. Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия, Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. в 2-х томах, Москва, Мир 1991.
- 85. T.H. Solomon, J.P. Gollub, Chaotic particle transport in time-dependant Rayleigh-Benard convection, Physical Review A **38** (12), 6280-6286 (1988).
- 86. R.N. Horne, J-P. Caltagerone, On the evolution of thermal disturbances during natural convection in a porous medium, J. Fluid Mech. **100**, 385-398 (1980).
- 87. O. Cardoso, P. Tabeling, Anomalous diffusion in a linear array of vortices, Europhys. Lett. 7 (3), 225-230 (1988).
- W. Young, A. Pumir, Y.Pomeau, Anomalous diffusion of tracer in convection rolls, Phys Fluids A, 1 (3), 462-469 (1989).
- E. Guyon, Y. Pomeau, J.P. Hulin, C. Baudet, Dispersion in the presence of recirculation zones, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 2, 271-280 (1987).
- T.H. Solomon, J.P. Gollub, Passive transport in steady Rayleigh-Benard convection, Phys. Fluids 31(6), 1372-1379 (1988).
- 91. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М: Наука, 1979. – 832с.
- 92. И.Л.Драников, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Режимы аномального переноса в модели стохастической адвекции-диффузии, ЖЭТФ **125**(5), 1082-1091 (2004).
- 93. I.L.Dranikov, P.S.Kondratenko, L.V.Matweev, Are the heavy tails in super-diffusion theory well justified physically? Intern. Journ. of Laser Physics, 14(3), 429-434 (2004).
- 94. И.Л.Драников, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Аномальный перенос примесей в модели стохастической адвекции. Доклады академии наук **394**, №2, стр.187-189 (2004).
- 95. И.Л.Драников, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Скейлинг в задачах переноса радионуклидов во фрактальных средах, Известия РАН Энергетика, №4, 113-120 (2004).
- 96. А.М.Дыхне, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Перенос примеси в перколяционных средах, Письма в ЖЭТФ **80** (6), 464-467 (2004).
- 97. A.M. Dykhne, I.L.Dranikov, P.S.Kondratenko, L.V.Matveev, Anomalous diffusion in a self-similar random advection field, Phys. Rev. E **72**, 061104 (2005).

- 98. П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Асимптотические режимы и структура хвостов концентрации в модели Дыхне, ЖЭТФ **131** (3), 494-499 (2007).
- P.S. Kondratenko, L.V. Matveev, Random advection in fractal medium with finite correlation length. Phys. Rev. E 75, 051102 – 1-5 (2007).
- 100. Alexander Dykhne, Ilya Dranikov, Peter Kondratenko, and Leonid Matveev, Transport regimes and concentration tails for classical diffusion in heterogeneous media with sharply contrasting properties, Vadose Zone J 7 (4) pp. 1145–1151 (2008).
- 101. Leonid Bolshov, Peter Kondratenko, Leonid Matveev, and Karsten Pruess, Elements of fractal generalization of dual-porosity model for solute transport in unsaturated fractured rocks, Vadose Zone J 7(4) pp. 1152–1160 (2008).
- 102. И.Л.Драников, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев. Супердиффузия в модели случайной адвекции. Труды ИБРАЭ, Вып.7, стр. 6-19 (2008).
- П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев. Стохастическая адвекция во фрактальной среде с конечным радиусом корреляции. Труды ИБРАЭ, Вып.7, стр. 20-30 (2008).
- 104. А.М.Дыхне, П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Диффузия примеси по перколяционному кластеру. Труды ИБРАЭ, Вып.7, стр. 71-78 (2008).
- 105. П.С.Кондратенко, Л.В.Матвеев, Режимы переноса и хвосты концентрации в регулярно-неоднородных сильно контрастных средах. Труды ИБРАЭ, Вып.7, стр. 79-91 (2008).
- 106. Л. В. Матвеев, Перенос примеси в модели двупористой регулярнонеоднородной среды при наличии коллоидов, ЖЭТФ 135(6), стр. 1200-1206 (2009).
- 107. О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Аномальная диффузия в обобщенной модели Дыхне, ЖЭТФ **137**(1), стр. 67-76 (2010).
- 108. В. М. Головизнин, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, И. А. Короткин, И. Л. Драников. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях. Москва, Наука, 2010. 342 стр.
- 109. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Аномальный перенос примеси в сильнонеоднородных средах применительно к проблеме захоронения

радиоактивных отходов. Статья в сборнике «Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двухфазных течений» под ред. А.А.Саркисова и Г.А.Филиппова. Том 1, Москва, Наука, 2010, стр. 56-122.

- P. S. Kondratenko, L. V. Matveev, Directed random advection in a fractal medium, Phys. Rev. E 83, 021106 (2011).
- 111. L. A. Bolshov, P. S. Kondratenko, L. V. Matveev, Colloid-facilitated contaminant transport in fractal media, Phys. Rev. E **84**, 041140 (2011).
- 112. Leonid A. Bolshov, Igor I. Linge, Olga A. Dvoretskaya, Peter.S. Kondratenko, Leonid V. Matveev, Anomalous Transport in Fractured Geologic Media: Basic Physical Models – 11134, WM2011 Conference, February 27 - March 3, 2011, Phoenix, AZ, Final Proceedings, 14 p.
- 113. Leonid Bolshov, Peter Kondratenko, Leonid Matveev, Non-Classical Transport in Fractal Media as Applied to Radioactive Waste Problem: Anisotropic Random Advection Model – 11147, WM2011 Conference, February 27 - March 3, 2011, Phoenix, AZ, Final Proceedings, 14 p.
- 114. Л. В. Матвеев, Перенос примеси в трещиновато-пористой среде с сорбцией, ЖЭТФ 142 (5), стр. 943-950 (2012).
- 115. Л. А. Большов, О. А. Дворецкая, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Аномальные режимы переноса примеси в регулярно-неоднородных резкоконтрастных средах. Статья в сборнике «Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двухфазных течений» под ред. А.А.Саркисова и Г.А.Филиппова. Том 3, Москва, «Комтехпринт», 2012, стр. 242-292.
- 116. Л. А. Большов, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, Аномальные режимы переноса примеси, обусловленные процессами сорбции в геологических средах. Статья в сборнике «Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных и двухфазных течений» под ред. А.А.Саркисова и Г.А.Филиппова. Том 3, Москва, «Комтехпринт», 2012, стр. 293-350.
- 117. Leonid Bolshov, Peter Kondratenko, Leonid Matveev, Non-classical transport in geological media, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.
- 118. Л.В. Матвеев, Адвекция примесит в перколяционных средах с конечной длиной корреляции, ЖЭТФ **145** (4) стр. 754-764 (2014).

- L.V. Matveev, Anomalous nonequilibrium transport simulations using a model of statistically homogeneous fractured-porous medium, Physica A 406, pp. 119-130 (2014).
- 120. V.A. Kutsepalov, L.V. Matveev, Non-classical regimes of colloid-facilitated impurity transport in statistically homogeneous double porosity media, International Conference on Statistical Physics 7-11 July 2014, Rhodes-Greece, p. 104.
- 121. V.A. Kutsepalov, L.V. Matveev, Non-classical regimes of colloid-facilitated impurity transport in statistically homogeneous double porosity media, Chaos, Solitons & Fractals 81, pp. 480-486 (2015).
- L.V. Matveev, Impurity transport in developed Rayleigh-Bénard convection, International Journal of Heat and Mass Transfer **95**, pp. 15-21 (2016).