

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

Труды ИБРАЭ

МЕТОДЫ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики

труды ибраэ

Под общей редакцией члена-корреспондента РАН Л. А. Большова

Выпуск 14

МЕТОДЫ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ

Москва Наука 2013

УДК 621.039

ББК 31.4

T78

Рецензенты:

доктор физико-математических наук Н. Г. Полухина, доктор физико-математических наук В. Н. Семенов

Труды ИБРАЭ РАН / под общ. ред. чл.-кор. РАН Л. А. Большова ; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. — М. : Наука, 2007— .

Вып. 14: Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах / А. А. Леонов, В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова. — 2013. — 197 с. : ил. — ISBN 978-5-02-038150-6 (в пер.).

В сборнике рассмотрены численные модели двухфазных сжимаемых газодинамических течений, а также возможности использования метода Годунова, основывающегося на использовании точного или приближенного римановского солвера, для расчетов ударно-волновых процессов в двухфазных средах.

Изложен метод улучшения робастности численного алгоритма с помощью перехода от механически равновесной модели к неравновесной по давлению модели с последующей релаксацией давления. Обсуждены возможности моделирования процессов испарения и конденсации в зависимости от интенсивности и скорости течения этих процессов в двухфазной среде с использованием реактивного римановского солвера или с применением процедуры релаксации температур и химических потенциалов компонентов этой двухфазной среды.

Для студентов, аспирантов и специалистов в области численных методов решения дифференциальных уравнений математической физики.

Proceedings of IBRAE RAS / Ed. by L. A. Bolshov ; Nuclear Safety Institute (IBRAE) RAS. — Moscow : Nauka, 2007— .

Issue 14 : Methods of direct numerical simulation in two-phase media / A. A. Leonov,

V. V. Chudanov, A. E. Aksenova. — 2013. — 197 p. : ill. — ISBN 978-5-02-038150-6 (bound).

The two-phase compressible flows numerical models equipped with Godunov method, using the precise or approximate Riemann solvers, are considered for calculations of shock-wave processes in twophase mixtures.

The method to improve the robustness of numerical algorithm for mechanical equilibrium two-phase model, using pressure non equilibrium model with relaxation, is explained.

Two different numerical approaches to simulate evaporation and condensation phenomena underneath from process intensity and velocity, using reactive Riemann solver or special relaxation procedure for temperatures and chemical potentials of two-phase mixture components, are discussed. The issue is intended for students, post-graduate students and specialists in numerical methods for solving differential equations of mathematical physics.

ISBN 978-5-02-038150-6

© Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2013

© А. А. Леонов, В. В. Чуданов, А. Е. Аксенова, 2013

© ООО «Академ-Принт», 2013

© Редакционно-издательское оформление. Издательство «Наука», 2013

[©] Продолжающееся издание «Труды ИБРАЭ РАН», 2007 (год основания), 2013

СОДЕРЖАНИЕ

| Предисловие | 5 |
|--|-------|
| Обзор методов, применяемых для моделирования двухфазных потоков | 7 |
| 1. Введение | 7 |
| Обзор некоторых подходов, используемых в мире в настоящее время | 11 |
| 3. Методы, основанные на использовании уравнений состояния stiffened | 46 |
| Литература | 50 |
| Метод дискретных уравнений для двумерных расчетов двухфазных течений | 54 |
| 1. Введение | 54 |
| 2. Описание метода | 55 |
| 3. Введение второго порядка точности | 65 |
| 4. Результаты вычислений | 65 |
| 5. Заключение | 81 |
| Литература | 81 |
| Моделирование взрывного испарения с применением реактивного римановского солвера | 83 |
| 1. Введение | 83 |
| 2. Уравнения состояния фаз в двухфазной смеси | 87 |
| 3. Реактивный римановский солвер | 88 |
| 4. Адаптация метода DEM для использования реактивного римановского солвера | 95 |
| 5. Результаты | . 102 |
| б. Заключение | . 111 |
| Литература | . 112 |
| Численное моделирование фазовых переходов в перегретой жидкости | . 113 |
| 1. Введение | . 113 |
| 2. Вывод базовой модели | . 115 |
| 3. Моделирование массообмена | . 121 |

| 4. Численный метод | 127 |
|---|-----|
| 5. Результаты | 139 |
| 6. Заключение | 143 |
| Литература | 144 |
| Численный метод для расчета двухфазных течений | |
| двухфазной модели | 146 |
| 1. Введение | 146 |
| 2. Механически равновесная и односкоростная неравновесная по давлению двухфазные модели | 147 |
| 3. Численный метод | 151 |
| 4. Результаты | 157 |
| 5. Заключение | 164 |
| Литература | 166 |
| Сравнение численных методов для расчетов двухфазных потоков | 167 |
| 1. Введение | 167 |
| 2. Описание двухфазных численных моделей | 169 |
| 3. Результаты | 189 |
| 4. Заключение | 196 |
| Литература | 197 |

Предисловие

Двухфазные среды (например, «жидкость — пар») являются частым явлением в индустриальных приложениях, таких как теплообменники, ядерные реакторы, котлы и т. д. Для их лучшего понимания происходящих в них процессов требуются как экспериментальные исследования, так и развитие вычислительных моделей. Прямое численное моделирование может помочь интерпретировать экспериментальные данные и понять локальные физические явления, которые, в свою очередь, могут использоваться для развития вычислительных моделей. Для этих целей применение прямого численного моделирования является уже довольно обычным делом, особенно применительно к задачам однофазной динамики жидкости. Однако в двухфазных потоках с фазовыми превращениями оно еще не получило широкого распространения, поскольку численные проблемы, которые возникают при моделировании таких потоков, гораздо сложнее, чем в однофазной динамике жидкости. Одна из сложностей — это прослеживание поверхности раздела на фиксированной вычислительной сетке (ITM interface tracking method).

За последние двадцать лет основные методы, используемые в коммерческих кодах, такие как метод объема жидкости (VOF), метод прослеживания границы (FT), метод набора уровней (LS), описанные в работах Yadigaraglu, Lakehal, Jamet, Delhaye, Krepper, Prasser, Zaleskii, Trigvasson и др., показали свою эффективность при 2D и 3D моделировании с явным выделением границы раздела фаз в средах типа «жидкость — пар». При этом использовались упрощенные консервативные модели для описания фазовых превращений на границе жидкости и пара. Однако в последнее время и по литературе, и по докладам на многочисленных конференциях все более определенно можно сделать вывод о достижении предела в развитии ITM-подхода, и даже активное развитие многопроцессорных компьютеров не позволит получать быстрые солверы для моделирования двухфазных CFD-течений (от Computational Fluid Dynamics).

В то же время в течение последнего десятилетия активное развитие получили новые методы, разрабатываемые группой Abgral и Saurel с коллегами, которые основали направление прямого численного моделирования двухфазных течений (в дальнейшем называемое stiffened) с использованием римановских солверов. Применяя определенные уравнения состояния, удалось получить новые эффективные и адекватные с точки зрения двухфазного моделирования, но очень ресурсоемкие модели, применимые в том числе и на параллельных кластерных ЭВМ. Одновременно с этим приверженцы ITM-подхода также обратили свои взоры на stiffenedподход. Это позволит, дополнив им ранее разработанные ITM-методы (например, Zaleskii и Trigvasson), получить новое качество в моделировании фазовых переходов на границе жидкости и пара и тем самым уменьшить консервативность предыдущих разработок.

Материал, представленный в сборнике, построен следующим образом. В первой части дан обзор используемых в мире подходов для моделирования двухфазных течений. Во второй части описывается адаптированная для двумерных расчетов модель DEM и приводятся результаты расчетов. Третья часть посвящена модели RDEM, а именно моделированию взрывного испарения с применением реактивного римановского солвера. Четвертая часть посвящена моделированию фазовых переходов в перегретой жидкости, рассматривается модель из пяти уравнений с учетом массообмена. Численная аппроксимация двухфазной механически неравновесной по давлению модели с использованием релаксационного метода для расчетов двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых течений описана в пятой части. В шестой части сравниваются результаты расчетов, сделанных с применением описанных моделей, а также содержатся заключение и некоторые замечания по применению рассматриваемых моделей.

Обзор методов, применяемых для моделирования двухфазных потоков

1. Введение

Со сложными потоками с фазовыми превращениями (например, «жидкость — пар») часто сталкиваются в индустриальных приложениях, таких как теплообменники, ядерные реакторы, котлы, и т. д. Для их лучшего понимания требуются как экспериментальные исследования, так и развитие аналитических моделей. Прямое численное моделирование может помочь интерпретировать экспериментальные данные и понять локальные физические явления, которые, в свою очередь, могут использоваться для развития аналитических моделей. Для этих целей использование прямого численного моделирования является уже довольно обычным делом, в особенности, применительно к задачам однофазной динамики жидкости. Однако в двухфазных потоках с фазовыми превращениями оно еще не получило широкого распространения, поскольку численные проблемы с которыми сталкиваются при моделировании таких потоков, гораздо более сложные, чем в однофазной динамике жидкости.

Первая такая проблема — это прослеживание поверхности раздела на фиксированной вычислительной сетке. При ее решении показали свою эффективность следующие методы: VOF [1], front-tracking [2] и level-set [3]. Однако они главным образом имеют дело с несмешивающимися жидкими системами. Действительно, в таких течениях скорость смещения интерфейсной границы равняется скорости жидкостей (газа и жидкости) на интерфейсной границе. Поэтому, зная поле скоростей, довольно просто интерполировать его на интерфейсную границу и переместить последнюю соответствующим образом. Когда имеют место фазовые превращения, проблема усложняется, потому что в этом случае на интерфейсе существуют сразу три различных скорости: скорости жидкой и паровой фаз и скорость смещения интерфейсной границы. Интерполяционная процедура при этом больше не является тривиальной. Однако Juric [4; 5] показал, что в таком случае можно определить скорость смещения интерфейса, используя итерационную процедуру, удовлетворяющую отношение Клапейрона на интерфейсе. Эту процедуру он применил к front-tracking методу. Ранее этот же подход применялся к VOF-методу [6].

Во всех упомянутых методах с фиксированной сеткой, по которой перемещаются интерфейсные границы системы, используется концепция непрерывного поверхностного натяжения (CSF) [7]. Поскольку уравнения движения двухфазной системы решаются на фиксированной сетке и интерфейсная граница не пересекает узлы сетки, поверхностное натяжение должно быть преобразовано в объемную силу. С точки зрения численного моделирования интерфейс (поверхность раздела фаз) распространяется по фиксированной сетке, и уравнения движения в этом случае решаются для переменных, которые изменяются непрерывно через трехмерные интерфейсные зоны.

Эффекты фазовых превращений «жидкость — пар» были решены в рамках одножидкостной формулировки разными исследователями: Beux с коллегами [8] использовали LS метод, Jamet применял так называемую *теорию второго градиента* или уравнения Cahn — Hilliard [9].

К совсем недавним 2D-вычислениям кипящих потоков относятся работы Juric и Tryggvason [10], использовавших расширение FT-метода, Welch и Wilson [6], использовавших VOF-метод, Beux с коллегами [11] и Son и Dhir [12], применявших LS-подход. 3D-вычисления с использованием FT-метода для моделирования пленочного кипения представлены Esmaeeli и Tryggvason [13]. Qian и др. [14] впоследствии развили 2D-FT-метод для задачи движения пламени предварительно перемешанной смеси, основанный на идеях Juric и Tryggvason [10] для кипящих потоков. Helenbrook и др. [15] и Nguyen и др. [16] выполнили вычисления пламени предварительно перемешанной смеси, используя LS-метод для несжимаемого невязкого потока, который допускает разрывы в свойствах жидкости.

Значительное число современных методов моделирования многофазных и многокомпонентных газодинамических течений основывается на численном решении уравнений Эйлера или Навье — Стокса, которые обычно дополняются одним или несколькими уравнениями, выражающими законы сохранения специфических для данной задачи физических величин (концентрация газовых пузырьков), необходимых для определения интерфейсных значений параметров многофазной системы. Применение таких численных методов приводит к возникновению искусственной диффузии через контактные разрывы и к искусственному смешиванию веществ на границе раздела. В такой искусственной смеси значения всех термодинамических параметров вычисляются с ошибкой. При сильно различающихся параметрах веществ такой подход приводит к отрицательным значениям давления уже на втором шаге по времени.

Наиболее известные работы в области моделирования многофазных и многокомпонентных газодинамических течений принадлежат Abgral и

Saurel. Так, в [17] ими была предложена двухфазная модель, позволяющая определять термодинамические и кинетические переменные каждого компонента смеси. При этом в любом месте расчетной сетки одним и тем же численным методом решались одинаковые уравнения как для случая двух несмешивающихся компонентов, разделенных поверхностью раздела, так и для случая присутствия физического смешивания различных веществ. Однако в этой работе была использована довольно сложная вычислительная методика, позволяющая решать газодинамические задачи, в которых присутствуют резкие разрывы профилей термодинамических величин и контактные разрывы.

Модель для описания эволюции двухфазных сжимаемых смесей [17] была предназначена для следующих приложений: поверхности раздела между сжимаемыми материалами; ударные волны в многофазных смесях; эволюция гомогенных двухфазных потоков; кавитация в жидкостях. Основные трудности этой модели были связаны с дискретизацией неконсервативных членов уравнения. В результате класс проблем, связанных с проходом ударных волн через области с разрывным профилем объемной фракции, не был описан посредством указанной модели. Класс схем, способных сходиться к правильному решению для таких проблем, был получен позднее в 2003 г. Saurel и Abgral [19] в результате более глубокого анализа двухфазной модели. Предлагаемая методика была реализована на эйлеровой сетке через схему Годунова.

Для моделирования переходных явлений в пористых материалах, подобных переходу от возгорания к взрыву, модель двухфазной среды с учетом микроинерции была предложена Saurel и Gavrilyuk [18]. Типичным примером среды с микроинерцией является жидкость, содержащая пузырьки с газом. Существуют по крайней мере два различных метода получения основных уравнений для двухфазной среды, основывающиеся на локальном усреднении законов сохранения и на использовании принципа наименьшего действия Гамильтона. Преимущество второго подхода, называемого еще вариационным, заключается в том, что основные уравнения можно получить на основе одной известной скалярной функции средних величин переменных, лагранжиана системы. Модель была получена или в результате использования вариационного подхода для случая двухфазной среды, в которой каждая компонента является сжимаемой и имеет собственную температуру.

Для моделирования потоков жидких частиц обычно используются следующие многофазные подходы: двухжидкостная теория, гранулированный подход Эйлера и объединенный CFD-метод дискретных элементов (DEM). Вследствие возрастающих возможностей компьютеров и способности

DEM-подхода предсказывать как плотные, так и разбавленные потоки этот метод становится все более популярным для моделирования поведения системы макрочастиц. В последнее время активно развивается объединенный трехмерный DEM-CFD-подход, предназначенный для моделирования различных многофазных процессов типа пневматической транспортировки, колонны барботажа и т. д. (см., например, [49]).

Ввиду особой важности для многих индустриальных приложений численных расчетов многофазных и многожидкостных сжимаемых потоков мы проверили возможности недавно развитых численных моделей при моделировании некоторых фундаментальных газодинамических проблем. Чтобы расширить область применения развитых моделей и уменьшить число входных параметров, используемые модели были основаны на фундаментальных уравнениях Эйлера, выражающих сохранение массы, импульса и энергии для каждой фазы или компоненты в многожидкостном потоке и для всей смеси. Используемые численные методы включают римановский солвер, дополняемый при необходимости уравнениями в соответствии с процедурой релаксации. В подобных солверах используется римановы инварианты и соотношения Ранкина — Гюгонио или модифицированные отношения удара. Проводилось качественное сравнение результатов, полученных для адвекции поверхности раздела при однородном давлении и потоке скорости, для двухфазной ударной трубы и для двухфазной трубы расширения с различными моделями. Были использованы метод дискретных уравнений (или модель семи уравнений), метод релаксации-проекции (или модель пяти уравнений), модель шести уравнений неравновесного давления. На первом шаге массообмен, который мог присутствовать при кавитации и перегретых потоках, не рассматривался. Для учета массообмена использовался специальный жесткий термохимический солвер.

Также был выполнен дополнительный анализ двухфазной модели с учетом микроструктуры топологии смеси в лагранжевых массовых координатах. В результате были получены уравнения, усредненные по набору всех возможных реализаций для двухфазной смеси. Численное решение было выполнено с использованием РРМ метода [20] в два этапа: на первом были решены уравнения, усредненные по массовой переменной, на втором решение, найденное на предыдущем шаге, отображалось на фиксированную эйлерову сетку. Такой подход позволяет распространить предложенную методику на двумерный (трехмерный) случай. Как и в лагранжевых переменных, эйлерова система уравнений расщепляется на две (три) идентичные подсистемы, каждая из которых описывает эволюцию рассматриваемой среды в заданном направлении. Точность и ошибкоустойчивость описанной процедуры была продемонстрирована на последовательности

численных проблем: ударная труба с двумя смесями и однородной объемной фракцией, ударная труба с хорошо перемешанными материалами, ударная труба с поверхностью раздела, отделяющей почти чистые материалы. Во всех случаях было продемонстрировано хорошее совпадение с известными результатами [19].

Сначала дадим обзор наиболее часто используемых методов (раздел 2) для прослеживания границы раздела (ITM); будут отмечены их основные преимущества и недостатки. Затем перейдем к изложению методов, использующих уравнение состояния stiffened (раздел 3).

2. Обзор некоторых подходов, используемых в мире в настоящее время

В настоящее время явления, имеющие место на поверхности раздела фаз (интерфейсе), моделируются или в рамках взаимно-проникающего непрерывного подхода, известного также как двухжидкостной метод [21], либо подхода, где топология и динамика поверхности раздела моделируются непосредственно при помощи методов прямого отслеживания поверхности раздела (ITM — interface tracking method).

В осредненном двухжидкостном подходе каждый локальный объем смеси занят одновременно обеими фазами, и отдельные уравнения сохранения необходимы для каждой фазы. Проблема заключается в определении замыкающих соотношений для интерфейсного обмена массой, импульсом и энергией в соответствующей интерфейсной области. При предсказании развития трехмерной поверхности раздела с помощью дополнительного уравнения переноса (например, [22]) механизмы, управляющие режимами течений, и связанные с ними времена релаксации могут быть учтены механистическим способом.

ITM применяются в случае, когда идентификация поверхностей раздела должна быть точной, например, при разрыве больших пузырей, для капелек или жидких струй. В данном классе методов используется однофазный набор уравнений сохранения, известных как одножидкостная формулировка, где различия в материальных свойствах и поверхностном натяжении учитываются путем решения адвективного уравнения для функции индикатора фаз. Этот подход предлагает более тонкую и точную стратегию идентификации поверхностей раздела, чем двухжидкостная формулировка. Таким образом, в отличие от осредненной модели ITM-подходы избегают обращения к эмпиризму при предсказании физики границы раздела фаз. По сравнению с взаимно проникающей непрерывной формулировкой ITM-подход можно рассматривать как прямое численное моделирование (DNS) движения границ, где никакие замыкающие предположения для развития граничной области не являются необходимыми. В случае турбулентных течений напряжения или моделируются в рамках RANS-подхода (Reynolds-averaged Navier-Stokes), или турбулентные структуры до масштаба Колмогорова моделируются непосредственно методом прямого численного моделирования турбулентности.

Наиболее часто используемыми ITM подходами для предсказания некоторых классов многофазных течений являются:

- метод жидкого объема (Volume of Fluid VOF) (см., например, [23]);
- метод движения границы раздела (Front Tracking FT) [24];
- метод набора уровней (Level Set LS) (см., например, [25]);
- метод фазовых полей (Phase Field PF) (см., например, [26]);
- метод адаптивных границ (Boundary Fitting BF) метод [30].

2.1. Методы жидкого объема (VOF) и набора уровней (LS)

Подход VOF основывается на определении поля жидкой объемной фракции или объемного соотношения, занятого одной из фаз в пределах объема V. Это свойство жидкости традиционно обозначается (в дискретном виде) как F_{ii} и определяется согласно выражению

$$F_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} \chi(x, t) dV,$$

где V — объем ячейки.

В контексте VOF известное топологическое уравнение, описывающее движение поверхности χ_k , перемещающейся со скоростью u,

$$\frac{D\chi_k}{Dt} = \frac{\partial\chi_k}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad}\chi_k = 0$$
(1)

представляет эволюцию жидкой объемной фракции, отделяя области потока, содержащие чистую жидкость (где $F_{ij} = 1$), от чисто газовых областей потока (где $F_{ij} = 0$). Интерфейсные ячейки таковы, что $0 < F_{ij} < 1$. VOF-метод не сводится исключительно к решению уравнения (1); он требует точных алгоритмов для переноса функции объемной фракции так, чтобы сохранить консервативность массы. Так как это не может быть достигнуто посредством обычных конечно-разностных схем из-за численной диффузии, сначала переносится композиционное поле, а затем

местоположение поверхности раздела восстанавливается, чтобы избежать численного размазывания поверхности раздела.

Обновленная информация о поверхности раздела — после адвективного шага уравнения (1) — отвергается в пользу дискретной объемной фракции F_{ii} . Местоположение геометрии поверхности раздела фаз восстанавли-

вается из локальных данных объемной фракции с использованием соответствующего алгоритма. Поскольку только этот тип алгоритма применяется для перенесения объемной фракции, масса систематически сохраняется, даже если поверхность раздела остается острой. Восстановленная поверхность раздела фаз используется затем, чтобы определить, например, взвешенные свойства материала ячейки согласно уравнению $\eta(\chi, t) = \eta_G + (\eta_I - \eta_G)\chi_I$. Неудобством является наличие острых межфазных переходов в поле объемной фракции из-за того, что кривизна к может сильно колебаться даже для совершенно круглых поверхностей. Этого можно было бы избежать, если вместо реконструкции линейными сегментами использовались бы изогнутые реконструкции поверхности раздела. Более ранние схемы реконструкции, обычно называемые simple line interface construction (SLIC), чтобы восстановить поверхности раздела, использовали только вертикальные или горизонтальные линии в каждой ячейке [27]. Совсем недавно реконструкции типа кусочно-линейного построения поверхности раздела (piecewise linear interface construction — PLIC) использовали прямые и наклонные линии в каждой ячейке [28; 29]. Это дает несколько преимуществ: свойства жидкости могут быть размещены более точно, способствуя более реалистичному выполнению моделей поверхностного натяжения и межфазного переноса. Совсем недавно появившиеся новые алгоритмы реконструкции используют сплайны и квадратичные функции.

Подход LS [25] состоит в решении уравнения (1) обычным способом при введении хитроумного метода для ограничения поверхности раздела на сетке. Формулировка основана на конструировании гладкой функции $\varphi(x, t)$, определенной всюду в вычислительной области Ω и представляющей собой кратчайшее расстояние до фронта (поверхности раздела). Отрицательные значения соответствуют одной из жидкостей, положительные — другой. Точное местоположение поверхности раздела $\Gamma(t)$ соответствует нулевому уровню φ . Выраженная в терминах композиционного поля χ функция LS такова, что $\chi_k = H(\varphi)$, где $H(\varphi)$ является функцией Хевисайда, определяемой следующим образом:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi > 0, \\ 0 & \text{если } \phi < 0. \end{cases}$$

Это подразумевает, что φ_{ij} связана непосредственно с полем жидкой объемной фракции F_{ii} через соотношение

$$F_{ij} = \frac{1}{V} \int_{V} H\left[\phi_{ij}\right] dV \,.$$

LS-функция $\phi(x, t)$ управляется топологическим уравнением (1). Преимущество использования такой формы прослеживания поверхности раздела, во-первых, в том, что это способ обходится без граничной реконструкции, используемой в VOF, которая является в вычислительном отношении очень дорогой и трудной (если не невозможной) для осуществления в не декартовых конфигурациях. Во-вторых, LS может быть легко распространен на 3D-случай и неструктурированные сетки. Оба метода применимы при слиянии (коалесценции) и фрагментации и позволяют проводить идентификацию точного местоположения поверхности раздела. Неудобства — размазывание интерфейса и неконсервативность массы. В отличие от LS при использовании искусственной функции набора уровней диффузно-граничные модели сохраняет массу, но только когда композиционная область определена как концентрация.

2.2. Метод адаптивных границ (BF)

В методе Boundary Fitting [30] уравнения Навье — Стокса со свойствами материалов, определяющими присутствие жидкостей в системе сначала решены отдельно в каждой подобласти. Впоследствии они соединены явно через неразрывность скорости и условия скачка напряжений на поверхности раздела. В отсутствие тепло- и массопереноса эти условия скачка могут быть выражены как

$$\begin{bmatrix} \left(\tau_{L} - \tau_{G}\right) \cdot n \end{bmatrix} \cdot n + \rho_{L} - \rho_{G} + \sigma \kappa \operatorname{grad} n + \left(\rho_{L} - \rho_{G}\right) g f = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \left(\tau_{L} - \tau_{G}\right) \cdot n \end{bmatrix} \cdot t_{i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$u_{G} = u_{L},$$

где t_1 и t_2 обозначают два касательных единичных вектора на поверхности раздела.

Местоположение границы должно быть идентифицировано мгновенно, чтобы непосредственно задать условия скачка на поверхности раздела.

Это может быть выполнено преобразованием уравнения (1) в уравнение адвекции вертикального отклонения поверхности раздела, обозначенного f(x,t) от ее нулевого уровня. Там, где управляющие уравнения включая (1) решены с использованием псевдоспектральной методики, метод предлагает более строгую стратегию, чем VOF или LS. Однако поскольку уравнение для отклонения интерфейсной границы не может быть распространено на сильные топологические изменения, метод остается ограниченным простыми двухфазными конфигурациями потока, где топология поверхности раздела легко определима подобно стратифицированным течениям.

Метод Boundary Fitting (см., например, [30]) не имеет широкого практического применения, его лучше использовать как DNS для идеализированных течений. Важно обратить внимание, что в этих методах положение поверхности раздела фаз определяется путем прослеживания функции индикатора фаз, которая имеет особый физический смысл в каждом подходе.

2.3. Метод прослеживания границы раздела (FT)

Метод основан на конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье — Стокса и уравнения энергии уравнений на неподвижной структурированной сетке и явном прослеживании фазовой границы на подвижной неструктурированной сетке.

Используется один набор уравнений переноса, справедливый как в жидкости, так и в паре. Такая формулировка учитывает влияние поверхности раздела через термины «источника», которые действуют только на границе раздела фаз.

Сначала определяются свойства материалов во всей области. Для этого вводится индикаторная функция $I(\mathbf{x},t)$, величина которой равна 1 в паре и 0 в жидкости. Свойства материалов считаются постоянными, но не равными для каждой фазы. Значение свойств материалов b (плотности ρ , удельного объема $\hat{\upsilon} = 1/\upsilon$, вязкости μ , удельной теплоемкости c и теплопроводности k) определяются с использованием индикаторной функции согласно выражению

$$b(x,t) = b_{\rm L} + (b_{\rm G} - b_{\rm L})I(x,t),$$
(2)

где G и L относятся к пару и жидкости соответственно.

Для нахождения индикаторной функции решается уравнение Пуассона с правой частью в виде функции, зависящей от положения интерфейса в момент времени *t*:

$$\nabla^2 I = \nabla \int_{\Gamma(t)} n\delta(x - x_s) ds,$$
(3)

где n — единичная нормаль к интерфейсу, направленная в паровую фазу; $x_s = x(s, t)$ — параметрическое задание интерфейсной границы $\Gamma(t)$; $\delta(x-x_s)$ — трехмерная дельта-функция, отличная от нуля только на интерфейсе.

Перенос интерфейсной границы лагранжевым способом определяется путем интегрирования выражения

$$\frac{dx_s}{dt} \cdot n = V_n, \tag{4}$$

где $V_n = V \cdot n$; V — вектор скорости интерфейса.

Только нормальная компонента интерфейсного движения определена физически. Касательное движение отсутствует, и предполагается, что интерфейс и жидкость на интерфейсе имеют одинаковые тангенциальные компоненты скорости.

Уравнение неразрывности (консервативность массы) имеет вид

$$\nabla \cdot w = \int_{\Gamma(t)} (\rho_{\rm G} - \rho_{\rm L}) V_n \delta(x - x) ds,$$
(5)

где $w = \rho u$ — поток массы.

Уравнение движения записывается во всей области, и силы поверхностного натяжения учтены в нем только на интерфейсе:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla(wu) = -\nabla P - \rho g + \nabla \tau + \int_{\Gamma(t)} \gamma \kappa n \delta(x - x_s) ds,$$
(6)

где P — давление; g — вектор силы тяжести; γ — коэффициент поверхностного натяжения; κ — дважды осредненная интерфейсная кривизна, которая положительна, когда центр кривой лежит в паровой фазе; τ — тензор deviatory напряжений для ньютоновской жидкости $\tau = \mu (\nabla u + \nabla u^T)$.

Интеграл в (6) учитывает поверхностное натяжение на интерфейсе. Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения постоянен и его тангенциальные вариации на интерфейсе игнорируются. Уравнение энергии с источником для учета высвобождения или накопления скрытой теплоты имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cT) + \nabla(wcT) = -\nabla q - \int_{\Gamma(t)} \dot{m} \left[L + (c_{\rm L} - c_{\rm G}) T_{\rm sat} \right] \delta(x - x_s) ds, \qquad (7)$$

где $q = -k\nabla T$ — во всей области; T — температура; L — скрытая теплота, измеренная при температуре равновесного насыщения $T_{\rm sat}(P_{\infty})$; \dot{m} — интерфейсный поток массы, определяемый согласно выражению

$$\dot{m} = \rho_{\rm L}(u_{\rm L} - V) \cdot n = \rho_{\rm G}(u_{\rm G} - V) \cdot n.$$
(8)

Интегрирование (5), (6) и (7) дает соотношения:

$$P_{\rm G} - P_{\rm L} = -\dot{m}^2 \left(\frac{1}{\rho_{\rm G}} - \frac{1}{\rho_{\rm L}} \right) + (\tau_{\rm G} \cdot n) \cdot n - (\tau_{\rm L} \cdot n) \cdot n + \gamma \kappa, \tag{9}$$

$$(\tau_{\rm G} \cdot n) \cdot t = (\tau_{\rm L} \cdot n) \cdot t, \tag{10}$$

$$(q_{\rm G} - q_{\rm L}) \cdot n = -\dot{m} \left[L + (c_{\rm G} - c_{\rm L})(T_s - T_{\rm sat}) \right] - \frac{\dot{m}^3}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\rm G}^2} - \frac{1}{\rho_{\rm L}^2} \right) + \dot{m} \left[\frac{(\tau_{\rm G} \cdot n) \cdot n}{\rho_{\rm G}} - \frac{(\tau_{\rm L} \cdot n) \cdot n}{\rho_{\rm L}} \right]$$
(11)

для нормального и тангенциального движения и энергии.

Для выбора граничных условий для температуры на интерфейсе существуют разные подходы. Например, в [28] для системы уравнений (2)—(7) предлагается использовать соотношение вида

$$T_{s} - T_{sat} - \frac{T_{sat}}{L} \left(\frac{1}{\rho_{G}} - \frac{1}{\rho_{L}} \right) (P_{s} - P_{\infty}) + \frac{(c_{G} - c_{L})}{L} (T_{s} - T_{sat})^{2} - \frac{\gamma T_{sat} \kappa}{2L} \left(\frac{1}{\rho_{G}} + \frac{1}{\rho_{L}} \right) + \frac{\dot{m}}{\phi} = 0,$$

$$(12)$$

где ф — кинетическая мобильность, описывающая отношение силы молекулярного прикрепления к поверхности (сопротивление массопереносу через интерфейс), определяемая согласно выражению

$$\phi = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)} \frac{L}{\sqrt{2\pi RT_{\text{sat}}}} \frac{1}{(\hat{\upsilon}_{\text{G}} - \hat{\upsilon}_{\text{L}})T_{\text{sat}}},$$
(13)

где R — газовая постоянная; α — доля молекул, которые покинули интерфейс в ходе испарения.

Измерения этой величины очень сложны, и примерный диапазон ее изменения от 0,04 до 1 зависит от жидкости. В [28] использованы параметры $\alpha = 1$ и $\dot{m} = -q_w / L$.

Последнее выражение справедливо для ситуации объемного пленочного кипения, где поток тепла q_w , приложенный к стенке, равен потоку в пар

 $q_{\scriptscriptstyle G}$, а поток в жидкость мал.

Диапазон изменения q_w/L — от 0,1 (при минимальном пленочном кипении) до 3 (при очень высоком пленочном кипении). В [28] q_w/L выбрано равным 1.

Интерфейсная граница представляет собой отдельные нестационарные вычислительные точки, связанные формой одномерного фронта, который лежит в пределах двумерной стационарной сетки.

Кривизна в каждой интерфейсной точке находится с помощью полинома четвертого порядка, построенного по трем точкам (1 плюс два соседа по бокам).

Фронт переносится по нормали к себе в лагранжевом представлении с помощью дискретной формы записи выражения (4)

$$\left(x_{s}^{n+1}-x_{s}^{n}\right)\cdot n^{n+1}=\Delta tV_{n}.$$
(14)

Движение фронта используется для переноса разрывных свойств материалов (2) путем решения уравнения Пуассона (3) для индикаторной функции I(x,t) на x_s^{n+1} , где x_s — параметрическая форма задания интерфейсной границы $\Gamma(t)$.

При моделировании происходит сильная деформация интерфейса, поэтому необходимо добавлять и удалять интерфейсные точки в ходе вычислений, чтобы дистанция между соседними точками r была порядка стационарного сеточного пространства. В работе используется условие $0, 4 < 2r / (h_x + h_y) < 1, 6$, где h_x , h_y — горизонтальный и вертикальный размеры ячейки сетки.

Условием слияния поверхностей раздела является сближение двух точек на расстояние, меньшее размера ячейки сетки.

На каждом временном шаге должна осуществляться передача информации между подвижным лагранжевым интерфейсом и стационарной эйле-

ровой сеткой. В работе для этого используется метод поглощения границ Пескина, согласно которому бесконечно тонкий интерфейс приближается гладкой функцией распределения, которая используется для распределения источников на интерфейсе через сеточные узлы вблизи интерфейса.

В [28] фронту задается постоянная толщина порядка размера ячейки сетки, чтобы обеспечить стабильность и гладкость.

Переписав интегралы из (3), (5)—(7) в виде

$$\Phi = \int_{\Gamma(t)} \varphi \delta(x - x_s) ds, \qquad (15)$$

дискретные интерфейсные источники ϕ_p можно распределить по сетке, и дискретные переменные поля R_{ij} (подразумевается w, P или T) могут быть интерполированы к поверхности раздела путем суммирования:

$$\Phi_{ij} = \sum_{p} \varphi_p D_{ij}(x_p) \Delta l_p, \qquad (16)$$

$$R_{p} = \sum_{ij} h_{x} h_{y} R_{ij} D_{ij}(x_{p}),$$
(17)

где Δl_p — среднее число сегментов, соединяющих точку p с левым и правым соседями.

(16) есть дискретная форма (15), где функция Дирака аппроксимирована функцией распределения D_{ii} .

Для $x_p = (x_p, y_p)$ используется функция распределения в виде

$$D_{ij}(x_p) = \frac{d(x_p / h_x - i)d(y_p / h_y - j)}{h_x h_y},$$
(18)

где

$$d(r) = \begin{cases} d_1(r), \text{ если } |r| \le 1, \\ 1/2 - d_1(2 - |r|), \text{ если } 1 < |r| < 2, \\ 0, \text{ если } |r| \ge 2 \end{cases}$$

$$d_1(r) = \frac{3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}}{8}$$

Для вычисления свойств материалов находится индикаторная функция с помощью быстрого солвера для решения уравнения Пуассона:

$$\nabla_h^2 I^{n+1} = \nabla_h \cdot G^{n+1}, \tag{19}$$

где *G* — поверхностный интеграл из (3), вычисленный с помощью (16).

Вычисленная таким образом индикаторная функция постоянна в пределах каждой материальной области, но имеется конечной толщины зона перемещения вокруг поверхности раздела. В этой зоне индикаторная функция и материальные свойства изменяются гладко от значения на одной стороне поверхности раздела до значения на другой стороне. Толщина переходной зоны — только функция размера ячейки, она постоянна в течение вычислений.

Затем вычисляются переменные *u*, *P* и *T* методом проекции фазовых превращений.

Для интегрирования по времени на эйлеровой сетке используются прямые направленные разности первого порядка. Дискретные формы (5) и (6) в этом случае имеют вид

$$\nabla_h \cdot w^{n+1} = M^{n+1}, \tag{20}$$

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} = A^n + F^{n+1} - \nabla_h P,$$
 (21)

где адвекция, диффузия и гравитация из (6) сосредоточены в слагаемом A, поверхностные интегралы из (5) и (6) обозначены соответственно M и F. Уравнение движения расщепляется следующим образом:

$$\frac{\tilde{w} - w^n}{\Delta t} = A^n + F^{n+1},$$
(22)

$$\frac{w^{n+1} - \tilde{w}^n}{\Delta t} = -\nabla_h P,$$
(23)

где \tilde{w} — новый поток жидкой массы, если влияние давления игнорируется. Первым шагом находится этот поток массы с использованием (22):

$$\tilde{w} = w^n + \Delta t \left(A^n + F^{n+1} \right).$$
(24)

Затем находится давление путем взятия дивергенции от (23) с использованием (20), что дает уравнение Пуассона для давления

$$\nabla_{h}^{2}P = \frac{\nabla_{h} \cdot \tilde{w} - M^{n+1}}{\Delta t},$$
(25)

которое решается быстрым солвером для решения уравнения Пуассона. Затем находится обновленный поток массы с использованием (23):

$$w^{n+1} = \tilde{w} - \Delta t \nabla P. \tag{26}$$

Тогда обновленная скорость есть просто $u^{n+1} = w^{n+1} / \rho^{n+1}$.

Как только становится известна скорость, решение дискретного уравнения энергии (7) дает поле температур

$$T^{n+1} = \frac{\rho^n c^n T^n + \Delta t \left(B^n + Q^{n+1} \right)}{\rho^{n+1} c^{n+1}},$$
(27)

где адвекция и диффузия включены в B, а интеграл по поверхности обозначен через Q.

Интегрирование по времени осуществляется явно, но источники G, M и Q оценены в (16) неявно на новом моменте времени (n+1).

Для пространственной дискретизации используется разнесенная сетка. Давление, температура и индикаторная функция расположены в центрах ячеек, *x* -я компонента скорости — на вертикальных гранях ячеек и *y* -е компоненты скорости — на горизонтальных гранях ячеек. Пространственные производные аппроксимированы со вторым порядком центральными разностями.

Вычисление напряжений, входящих в слагаемое A, требует специального подхода из-за конечной численной толщины переходной зоны около поверхности раздела. Вследствие фазовых превращений дивергенция поля скоростей отлична от нуля в конечной зоне вокруг интерфейсной границы, что в искусственных нормальных вязких напряжениях может вызывать локальные пики давления. Чтобы избегать этой трудности, в работе вычитаются напряжения из-за этой ненулевой дивергенции из вязких напряжений. Таким образом, A имеет вид

$$A = -\nabla_{h} \cdot (wu) + \rho g + \nabla_{h} \cdot \mu \Big[\nabla_{h} u + \nabla_{h} u^{T} - 2 \big(\nabla_{h} \cdot u \big) \mathbf{I} \Big],$$
(28)

где I — единичный тензор. Если бы учитывались и вязкие диссипации, аналогичная коррекция была бы необходима и для них.

С учетом начальной формы поверхности раздела фаз индикаторная функция и свойства материалов вычисляются из (19) и (2).

С соответствующими начальными условиями для скорости и температуры алгоритм решения продолжается итерационно и включает следующие шаги:

1. B^n рассчитывается из (27). A^n вычисляется для (21) с использованием (28).

2. С использованием оценки нормальной скорости поверхности раздела V_n поверхность раздела переносится к новому положению посредством (14).

3. В этом новом положении поверхности раздела источники G^{n+1} , M^{n+1} , F^{n+1} и Q^{n+1} вычисляются с использованием (16).

4. Плотность ρ^{n+1} и удельная теплота c^{n+1} в новом положении поверхности раздела найдены из решения (19) и (2).

5. С соответствующими граничными условиями на стенке и A^n и B^n , вычисленными на шаге 1, выражения (20), (21) и (27) решены для скорости, давления и температуры на момент времени (n+1) с использованием метода проекции фазовых изменений, описанного выше.

6. Вычисляется условие для температуры на поверхности раздела (12): температура, давление и поток массы на момент времени (n+1) интерполируются посредством (17), чтобы найти температуру T_s , давление P_s и интерфейсный поток массы \dot{m} в каждой точке на поверхности раздела, найденной на шаге 2.

7. Если условие для температуры поверхности раздела выполнено, вязкость и теплопроводность обновляются к новому положению поверхности раздела, найденному на шаге 2, посредством (19) и (2) и вычисление продолжается для следующего шага по времени. Если условие не выполнено, новая оценка для обновленной нормальной скорости V_n находится в каждой точке поверхности раздела с использованием (29) (см. ниже), и процедура возвращается к шагу 2.

В матричной форме итерация Ньютона обновляет неизвестные скорости в каждой точке с помощью уравнения

$$V_{n}^{l+1} = V_{n}^{l} - [J]^{-1} E^{l}(V_{n}^{l}),$$
(29)

где l — индекс итерации; V_n и E — векторы-столбцы размерности (N×1) нормальных интерфейсных скоростей и ошибок в каждой точке; N — число точек на интерфейсе.

Якобиан J является матрицей размера $(N \times N)$ частных производных ошибки относительно скоростей.

Так как эти производные трудно вычисляются, а следовательно, и последующая матричная инверсия в вычислительном отношении является слишком дорогой, авторы используют якобиан, имеющий простую форму:

$$J = a^{-1}I, \tag{30}$$

где *I* — единичная матрица; *а* — константа. Эта константа определяет скорость сходимости итераций.

При оптимальном значении a, которое является различным для разных физических параметров, итерации сходятся довольно быстро при допуске $\varepsilon = 10^{-5}$ от 3 до 10 итераций.

Допуск рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = \max\left(\varepsilon, \left|V_{n_p}^{l+1} - V_{n_p}^{l}\right|\right), \ p = 1, N.$$
(31)

Оптимальные значения для параметра *а* были определены [28] из вычислительных экспериментов и принадлежат диапазону от 1 до 10.

2.4. Межфазный тепло- и массоперенос

Массообмен между газообразными и жидкими фазами происходит при различных условиях. Поглощение слегка растворимых газов через интерфейсный подслой существенно отличается от сильного интерфейсного всасывания массы из-за конденсации или испарения. Такие явления присутствуют в некотором классе ядерных технических приложений подобно смесям паровых и неконденсируемых газов в контайнменте.

Численное моделирование интерфейсного фазового превращения сопряжено с рядом трудностей, непосредственно связанных с физикой проблемы. Например, для чисел Прандтля и Шмидта, характерных для ядерных технических приложений, толщина регионов, для которых существенны концентрационный и температурный градиенты, составляет доли миллиметра. Так как скорость переноса массы вследствие конденсации зависит от градиентов концентрации массы и температуры через поверхность раздела, ее определение требует точного разрешения на поверхности раздела. Это, Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

очевидно, невозможно в практических ситуациях. Будущее исследование должно, таким образом, положиться на экспериментальные корреляции для этих механизмов переноса или на DNS-данные, по крайней мере для потоков массы из диапазона «от низкого к среднему». Эффекты фазовых превращений «жидкость — пар» были решены в пределах одножидкостной формулировки различными исследователями: Beux [8] и Son [12] использовали LS-метод, Juric и Tryggvason [10] применяли свой FT-подход, Jamet [11] применял так называемую теорию второго градиента или уравнение Cahn — Hilliard.

В принципе включение теплообмена в пределах одножидкостной формулировки требует использования условий скачка массы и энергии [31] на поверхности раздела, определяемых как

$$\dot{m} = \rho_{\rm L} \left(u_{\rm L} - V_f \right) \cdot n = \rho_G \left(u_{\rm G} - V_f \right) \cdot n \tag{32}$$

И

$$\dot{m}H_{\rm LG} + \dot{q} = 0; \ \dot{q} = (q_{\rm G} - q_{\rm L}) \cdot n,$$
(33)

где \dot{m} — межфазный поток массы; $H_{\rm LG}$ — скрытая теплота испарения; \dot{q} — скорость выпуска теплоты на поверхности раздела; V_f — скорость фронта.

В этом случае уравнения сохранения массы приобретут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi_{\rm L}\rho_{\rm L}) + \operatorname{grad}(\chi_{\rm L}\rho_{\rm L}u) = \rho_{\rm L}(u - V_f) \cdot \operatorname{grad}\chi_{\rm L}, \qquad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(1 - \chi_{\rm L} \right) \rho_{\rm G} \right) + \operatorname{grad} \left(\left(1 - \chi_{\rm L} \right) \rho_{\rm G} u \right) = -\rho_{\rm G} \left(u - V_f \right) \cdot \operatorname{grad} \chi_{\rm L}.$$
(35)

Суммируя эти отношения и предполагая несжимаемость каждой фазы, получим

$$\left(\rho_{\rm L} - \rho_{\rm G}\right) \frac{D\chi_{\rm L}}{Dt} + \rho \operatorname{grad} u = \left(\rho_{\rm L} - \rho_{\rm G}\right) \left(u - V_f\right) \cdot \operatorname{grad} \chi_{\rm L}.$$
 (36)

Уравнение (36) может быть снова расщеплено на уравнение сохранения массы grad u = 0 и дополнительную часть, представленную топологическим уравнением

$$\frac{\partial \chi_{\rm L}}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \chi_{\rm L} = \left(u - V_f \right) \cdot \operatorname{grad} \chi_{\rm L}, \qquad (37)$$

в котором межфазный перенос массы отражен в источнике. В типичном применении VOF, где χ представляет VOF F_{ij} , уравнение (37) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} F = \frac{1}{\rho} \int \dot{m} \delta\left(x - x_f\right) ds, \tag{38}$$

где использованы выражение для скачка массы, уравнение (32) и grad χ , задаваемый уравнением grad $\chi = \int \delta(x - x_f) n ds$. Затем использование выражения для высвобождения тепла $\dot{m} = \dot{q} / H_{\rm LG}$ приводит уравнение (38) к виду

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \text{grad}F = \frac{1}{\rho H_{\text{LG}}} \int (q_{\text{G}} - q_{\text{L}}) \cdot n\delta(x - x_{f}) ds, \qquad (39)$$

где скачок в энергии $q_{\rm G}-q_{\rm L}$ может быть определен путем решения температурных градиентов на обеих сторонах поверхности раздела, например $q_{\rm G}=-\lambda_{\rm G} \, {\rm grad} T \big|_{\rm G}$.

В LS-методе, где χ выражено в терминах расстояния до поверхности раздела ϕ_{ii} , можно показать, что уравнение (37) можно выбрать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{\dot{m}}{\rho} |\operatorname{grad} \varphi|, \qquad (40)$$

где снова использовано уравнение (32) вместе с выражением для единичного вектора нормали $n = \operatorname{grad} \phi / |\operatorname{grad} \phi|$. Выведение затем массового потока \dot{m} из уравнения (33) дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{\rho H_{\mathrm{LG}}} (q_{\mathrm{G}} - q_{\mathrm{L}}) \operatorname{grad} \varphi, \tag{41}$$

которое при помощи модифицированной функции Хевисайда упрощается до

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{\delta(\varphi)}{\rho H_{\mathrm{LG}}} (q_{\mathrm{G}} - q_{\mathrm{L}}) \cdot \operatorname{grad} \overline{H}(\varphi).$$
(42)

В результате тестирования метода было обнаружено, что он удовлетворительно работает для потоков с низкой массой, например, для схлопывания пузыря в переохлажденной жидкости [8] и для кипения капель на горизонтальной поверхности [12]. Преимущество состоит в том, что температурные градиенты, появляющиеся в уравнении (42), явно выражены в терминах расстояния до поверхности раздела φ. Однако неспособность LS сохранять массу может существенно влиять на результат.

В рамках FT-метода рассматривающие 2D-течения Juric и Tryggvason [10] предложили решать топологическое уравнение для движения фронта в самой простой форме, задаваемой уравнением (1), и преобразовать слагаемое в правой части уравнения (37) к источнику массы, следующей из испарения или уплотнения. Эта альтернатива также использовалась в [6] для предсказания кипения горизонтальной пленки в соединении с одним из VOF-вариантов и в [12] в соединении с LS-подходом. 3D-вычисления с использованием FT-метода для моделирования пленочного кипения были представлены в [13]. Кроме того, двумерные задачи горения с помощью FT-метода исследовались в [14], а с помощью LS-подхода — в [15; 16].

2.5. Метод второго градиента

Классически в макроскопическом масштабе интерфейс между жидкостью и ее паром и в более общем виде — между двумя жидкостями моделируется как разрывная поверхность, наделенная свойствами, наиболее важным из которых является поверхностное натяжение [32]. Однако в микроскопическом масштабе интерфейс — это объемная зона перехода, через которую молекулярная плотность изменяется непрерывно. Поэтому желательно описать систему «жидкость — пар» (включая интерфейсные границы) общими уравнениями механики жидкости.

Самый простой способ определять такие уравнения состоит в том, чтобы считать внутреннюю энергию жидкости зависящей не только от ее энтропии и плотности, но и от ее градиента плотности. Ван-дер-Ваальс впервые показал [33], что при моделировании интерфейсной границы как трехмерной непрерывной среды энергия жидкой частицы должна зависеть не только от ее плотности (если это принимается, то жидкость находится в тепловом равновесии), но и от градиента плотности:

$$F = F^{0}\left(\rho\right) + \lambda \frac{\left(\nabla\rho\right)^{2}}{2},$$
(43)

где F — объемная свободная энергия жидкости; F^0 — классическая часть; λ — коэффициент капиллярности, обычно равный константе.

Эта зависимость от градиента плотности объясняет существование конечной толщины межфазной границы, также как и поверхностного натяжения.

Korteweg [34] позже показал, что общее ограничение в пределах интерфейсной зоны «жидкость — пар» также зависит от градиента плотности. Cahn и Hilliard изучали при равновесном состоянии интерфейсные границы, разделяющие жидкости различной природы [35], используя ту же концепцию зависимости энергии от общей функции индикатора фаз.

Rocard [36] показал, что форма свободной энергии, определяемой с помощью уравнения (43), может быть объяснена в молекулярном масштабе с использованием теории среднего поля. В пределах интерфейсной зоны «жидкость — пар» плотность частиц, окружающих тестовую частицу, не имеет сферической симметрии. Поэтому разложение в ряд Тейлора по порядку одной из этих плотностей частиц в направлении, нормальном к интерфейсу, показывает, что к «классической» энергии взаимодействия, зависящей только от плотности, должна быть добавлена энергия, пропорплотности, циональная квадрату градиента как постулируется в уравнении (43). О такой жидкости говорят, что она обладает внутренней капиллярностью. Очевидно, что введение зависимости энергии жидкости от ее градиента плотности соответствует более высокому порядку моделирования (как это сделано в расширении газовой динамики Chapman — Enskog, например, в [37]).

Равновесное состояние жидкости, обладающей внутренней капиллярностью, таково, что ее свободная энергия минимальна. Для одномерной проблемы в декартовой системе координат имеем

$$\delta \int_{z-}^{z+} \left[F^0\left(\rho\right) + \lambda \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 + L_1 \rho \right] dz = 0,$$
(44)

где L_1 — лагранжев множитель, обеспечивающий замкнутость системы, т. е. сохранение массы.

Поэтому профиль плотности $\rho(z)$ в условиях равновесия удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda \frac{d^2 \rho}{dz^2} = \mu(\rho) - L_1, \qquad (45)$$

где μ — химический потенциал. Тогда L_1 интерпретируется как химический потенциал при насыщении.

Используя этот профиль плотности в условиях равновесия, можно показать, что выражение энергии, сконцентрированной на интерфейсной границе (иногда называемой энергией избытка), которая есть поверхностное натяжение, определяется выражением

$$\sigma = \int_{z_{-}}^{z_{+}} \lambda \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^{2} dz.$$
(46)

Термодинамическая теория, описанная выше для изотермических систем, может быть обобщена на неизотермические системы, для которых предполагается, что внутренняя энергия жидкости зависит не только от ее плотности и энтропии, но и градиента плотности:

$$u = u \left[s, \rho, \left(\nabla \rho \right)^2 \right].$$
(47)

Обращаем внимание, что эта модель может быть расширена путем учета зависимости внутренней энергии от градиента энтропии. Однако последствия введения этой другой зависимости не очевидны для моделирования физических явлений, которые являются темой этого исследования.

Для получения уравнений движения жидкости в рассматриваемой задаче существует несколько подходов, которые рассмотрены в [38]. Детали могут быть найдены для подхода Гамильтона в [39] и для подхода, использующего принцип виртуальной работы в [40]. Таким образом, уравнения в частных производных, которые управляют движением жидкости с внутренней капиллярностью, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho V \right) = 0, \tag{48}$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = F - \nabla p - \nabla (\lambda \nabla \rho \otimes \nabla \rho) + \nabla \tau^{D}, \qquad (49)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = F \cdot V - \nabla \left[\left(-pI - \lambda \nabla \rho \otimes \nabla \rho + \tau^{D} \right) \cdot V \right] + \nabla \left(\lambda \nabla \rho \frac{d\rho}{dt} \right) - \nabla q,$$
(50)

где p — давление, определяемое из (51); λ — коэффициент капиллярности, определяемый из (52); τ^{D} — диссипативная часть тензора напряжений; e — удельная общая энергия; q — тепловой поток.

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{s,(\nabla \rho)^2} - \rho \nabla (\lambda \nabla \rho),$$
(51)

$$\lambda = 2\rho \left(\frac{\partial u}{\partial (\nabla \rho)^2}\right)_{s,\rho}.$$
(52)

Приведенная система уравнений будет замкнута, если известны выражения для внутренней энергии $u = u \left[s, \rho, \left(\nabla \rho \right)^2 \right]$ (поскольку p и λ зависят от u), диссипативного тензора τ^D и теплового потока q.

Выражения для удельной внутренней энергии и последствия их применения представлены ниже. Используя термодинамику необратимых процессов, Seppecher [41] получил общее выражение для τ^D и q. В результате появилось пять новых коэффициентов в выражении для τ^D . Их физическая значимость пока не установлена, поэтому для τ^D выбрали выражение Ньютона (обычно выбираемое предположение, дающее хорошую интерпретацию макроскопических явлений, например, [38]). В свою очередь, для теплового потока использовался классический закон Фурье. Отсюда

$$\tau^{D} = v \operatorname{tr}(D) + 2\mu D, \tag{53}$$

где

$$D \triangleq \left(\nabla V + \nabla^T V \right) / 2,$$

И

$$q = -k\nabla T. \tag{54}$$

Тот факт, что теория Cahn — Hilliard объясняет поверхностное натяжение как объемное свойство, уже приводился выше, когда поверхностное натяжение интерпретировалось как энергия на единицу площади. Учитывая балансное уравнение движения (49), анализ усилия, прикладываемого к элементарному объему, помещенном в пределах интерфейсной зоны, показывает (см., например, [42]), что в условиях равновесия давление в тангенциальном направлении интерфейсной границы гораздо слабее давления в нормальном направлении. Таким образом, натяжение прикладывается в тангенциальном направлении интерфейсной границы, а его интегрирование (натяжение) интерпретируется как поверхностное натяжение. И, следовательно, найденное выражение для определения поверхностного натяжения есть (46).

Система уравнений (48)—(50) был записана для интерфейсной зоны, где градиент плотности дает значительный вклад в энергию. Однако

в пределах каждой фазы этим вкладом можно пренебречь и прямо показать, что в этом случае уравнения (48)—(50) сводятся к классическим уравнениям движения однофазной жидкости.

Это означает, что решение только данных трех непрерывных уравнений в частных производных будет определять весь двухфазный поток «жидкость — пар», с движением интерфейсных границ включая разрывы и слияния, являющиеся только частью решения. Поэтому фактически никакой специальной обработки интерфейсных границ не потребуется, т. е. главная трудность, с которой приходится сталкиваться в численных методах, посвященных прямому численному моделированию двухфазных течений, может быть преодолена.

Простой анализ порядков величин (например, в [41]) показывает, что уместный масштаб длины, связанный с уравнением движения жидкости, обеспеченной внутренней капиллярностью, составляет около 10⁻¹⁰ м. Поскольку поверхностное натяжение появляется как интегральное свойство, интерфейсная зона должна быть разрешена численно, и поэтому, чтобы представить интерфейсную границу, должно быть использовано несколько узлов дискретизации. Следовательно, чтобы решить одномерную проблему с характерным масштабом длины 1 мм, необходимо около 10⁷ узлов дискретизации равномерно пространственной сетки, что абсолютно неприемлемо.

Далее необходимо проанализировать, возможно ли искусственное увеличение межфазной зоны «жидкость — пар» без потери согласования термодинамических свойств. Применение метода второго градиента характерно для окрестности критической точки. Рассмотрим равновесную систему «жидкость — пар» при температуре чуть ниже критической температуры жидкости T_c . При этих условиях толщина межфазной границы системы «жидкость — пар» обычно составляет порядка 1 мкм. Это означает, что вблизи критической точки использование трехмерной модели для описания интерфейсной границы «жидкость — пар» причиной ее применения для изучения критических явлений (см., например, [44]).

Кроме того, около критической точки может быть записано упрощенное уравнение состояния жидкости [45]. Например, можно показать, что зависимость от энергии W, определяемая как

$$W(\rho) = F(\rho) - \left[F(\rho_{\nu}^{sat}) + \mu^{sat}(\rho - \rho_{\nu}^{sat})\right],$$
(55)

где μ^{sat} — химический потенциал при насыщении; ρ_v^{sat} и ρ_l^{sat} — плотности при насыщении паровой и жидкой фаз соответственно; A — константа (все свойства являются функциями температуры), приобретает следующую особенно простую форму:

$$W(\rho) = A(\rho - \rho_{\nu}^{\text{sat}})^2 (\rho - \rho_l^{\text{sat}})^2.$$
(56)

Рассмотрим плоскую межфазную границу при условии равновесия вблизи критической точки. Полагая коэффициент капиллярности равным константе, можно проинтегрировать балансовое уравнение движения аналитически и найти, что профиль плотности через плоскую межфазную границу в состоянии равновесия определяется из выражения

$$\rho(z) = \frac{\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}}}{2} + \frac{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}}{2} \tanh\left(z\frac{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}}{\sqrt{2\lambda/A}}\right).$$
(57)

При этих условиях толщина межфазной границы и сила поверхностного натяжения определяются следующим образом:

$$h = \frac{4}{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}} \sqrt{\frac{\lambda}{2A}},$$
(58)

$$\sigma = \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right)^3}{6} \sqrt{2\lambda A}.$$
(59)

Уравнения (58) и (59) показывают, что теория второго градиента в окрестности критической точки предсказывает, что толщина межфазной границы в равновесном состоянии пропорциональна $h \approx \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$, а поверхностное натяжение пропорционально $\sigma \approx \sqrt{\lambda A}$.

Это замечание важно для понимания способа, которым интерфейсная граница может быть искусственно увеличена. Цель заключается в искусственном увеличении толщины межфазной границы до величины, которая может быть разрешена на допустимой расчетной сетке, а толщина межфазной границы рассматривается как параметр, величина которого определяется размерами исследуемой системы, компьютерной мощностью и т. д.

Изучение границы раздела в равновесии вблизи критической точки показывает, что толщина межфазной границы пропорциональна $\sqrt{\lambda}$. Следовательно, искусственное увеличение границы может быть достигнуто путем

увеличения $\sqrt{\lambda}$. Однако сила поверхностного натяжения также пропорциональна $\sqrt{\lambda}$, и поэтому увеличение коэффициента капиллярности будет увеличивать величину поверхностного натяжения жидкости, что неприемлемо, поскольку цель состоит в прямом численном моделировании, для которого поверхностное натяжение является важным физическим свойством.

Эту проблему можно преодолеть, путем уменьшения коэффициента A с той же скоростью, с какой увеличивается λ — см. уравнения (58) и (59). Отсюда следует, что толщина интерфейса может быть увеличена без изменения величины поверхностного натяжения.

Рассуждения показывают, что возможно искусственное увеличение интерфейса без изменения термодинамической согласованности модели второго градиента при условии, что термодинамическое поведение жидкости изменено внутри интерфейсной зоны (или, более точно, если зависимость от плотности термодинамических функций изменена только для значений плотности между значениями плотностей при насыщении, т. е. внутри биноидальной области).

Тогда возникает другая проблема. Действительно, изменение значения A влечет за собой изменение термодинамического поведения жидкости для всех значений плотности как следует из (56). В частности, производная $dP/d\rho$ будет изменена при плотностях в условиях насыщения, что означает, что скорость звука жидкой и паровой фаз будет модифицирована. Это неприемлемо в случае прямого численного моделирования.

Проблема в том, чтобы модифицировать уравнение состояния жидкости так, чтобы интерфейсная граница могла быть искусственно расширена, но поддержать некоторую регулярность около биноидальной кривой, т. е. для величин ρ , близких к ρ_{ν}^{sat} и ρ_{l}^{sat} . Возможное решение этой проблемы изложено ниже.

Следует подчеркнуть, что этот последний пункт делает проблему использования метода диффузионного интерфейса для моделирования явлений фазового превращения более трудным, чем моделирование несмешивающихся двухфазных течений. Действительно, Jacqmin [46] развивал ту же идею, что представлена выше, но для несмешивающихся жидкостей, для которых использовалась теория Cahn — Hilliard. Вопрос о выполнении уравнения состояния объемных фаз в этом случае не стоит, поскольку фазы предполагаются несжимаемыми.

Лучший способ описания термодинамического поведения жидкости, удовлетворяющего всем предварительно сформулированным условиям, — это работать непосредственно на «классической» свободной энергии жидкости и на ее капиллярном коэффициенте, полагаемом постоянным (или в виде функции, зависящей только от температуры). Причина в том, что как только термодинамическое поведение задано, все интерфейсные свойства являются только следствиями этого задания.

Перечислим условия, которые должны быть удовлетворены:

- величина толщины межфазной границы при равновесии $h^{\rm sat}$ может быть выбрана произвольным образом (from numerical arguments);
- величина поверхностного натяжения для равновесной системы σ^{sat} может быть выбрана произвольно из эксперимента или модели;
- термодинамические свойства пузырьковой фазы могут быть выбраны произвольно из эксперимента или модели;
- давление как функция плотности непрерывно дифференцируемо (непрерывная скорость звука).

Предлагается искать модифицированную термодинамическую функцию $W^{\mathrm{mod}}\left(
ho
ight)$, используя выражение вида

$$W^{\mathrm{mod}}(\rho) = \frac{\sigma^{\mathrm{sat}}}{h^{\mathrm{sat}}} \left[\phi(r) \right]^2$$
,

где ϕ — безразмерная функция безразмерной переменной $r \triangleq \frac{\rho - \rho_v^{sat}}{\rho_l^{sat} - \rho_v^{sat}}$.

Определим функцию

$$\Psi(r) \doteq \frac{\varphi(r)}{\max \varphi}.$$
 (60)

Jamet [40] показал, что форма функции $\psi(r)$ должна быть такой, как показано на рис. 1.

Одно из главных требований, которое должно быть удовлетворено: при увеличении интерфейсной границы должно уменьшиться значение A в окрестности критической точки, или, в более общем виде, уменьшиться максимум функции $W(\rho)$. Если бы это было единственным требованием, функция $\psi(r)$ все еще имела бы параболический профиль. Кроме того, требуется, чтобы функция $(dP/d\rho)(\rho)$ сохраняла свое значение и была непрерывна при $\rho = \rho_v^{sat}$ и $\rho = \rho_l^{sat}$. Прямо показано, что эта производная $\sqrt{W}(\rho)$ должна сохраняться постоянной, и ее максимум должны быть уменьшен.

Если это уменьшение огромно (типично порядка 10⁴ в условиях рис. 1), тогда первоначально параболическая форма $\sqrt{W}(\rho)$ будет сильно сокращаться только в средней части, и ее тангенсы при $\rho = \rho_v^{\text{sat}}$ и $\rho = \rho_l^{\text{sat}}$ сохранятся постоянными, чтобы безразмерная форма $\psi(r)$ была такой, как показано на рис. 1.



Рис. 1. Форма функции ψ(r) для воды при температуре на 1 К ниже критической точки и искусственной толщине интерфейса при равновесии, равной 1 мм

При задании функции $\psi(r)$ все термодинамические свойства жидкости могут быть выведены путем дифференцирования. Например, можно показать, что

$$P^{\text{mod}}(\rho) - P^{\text{sat}} = \frac{2\sigma^{\text{sat}}}{h^{\text{sat}}} \varphi \left(\frac{\rho}{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_\nu^{\text{sat}}} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{2} \varphi \right).$$
(61)

В [11] показано модифицированное уравнение состояния воды при температуре на 1 К ниже критической точки, для которого искусственная толщина межфазной границы равна 1 мм. Для простоты принималось, что уравнение состояния Ван-дер-Ваальса справедливо в объеме фаз и образует график внутри биноидальной области, подобный справочному уравнению состояния. Можно показать, что модифицированное уравнение состояния сильно изменяется внутри бинодального интервала. Причина этого заключается в том, что для рассматриваемого случая искусственное увеличение толщины межфазной границы в 10⁴ раз соответствует уменьшению максимума ($dP/d\rho$) (который достигается в середине бинодального интервала) приблизительно в 10⁴ раз — см. уравнения (58) и (59), для которых A грубо пропорционально max ($dP/d\rho$).

Описанная выше процедура нахождения модифицированного термодинамического поведения жидкости справедлива, если система изотермическая: функция $\psi(r)$ и затем модифицированная объемная свободная энергия $F^{\text{mod}}(\rho)$ могут быть найдены для любой заданной температуры. Однако Jamet [40] показал, что работа непосредственно со свободной энергией при поиске модифицированной термодинамики сохраняет всю термодинамическую согласованность модели и что термодинамические отношения Максвелла выполнены.

Нужно подчеркнуть, что модифицированная термодинамика, представленная выше, не изменяет значения плотностей при насыщении, а это означает, что биноидальная кривая не изменяется. Поэтому любая термодинамическая функция не изменяется при насыщении, особенно удельная энтальпия i, и скрытая теплота парообразования **L**, определяемая выражением

$$\mathbf{L} = i_{v}^{\text{sat}} - i_{l}^{\text{sat}},\tag{62}$$

остается неизменной при модификации представленной здесь термодинамики.

Далее необходимо проанализировать, каковы последствия при модификации уравнения состояния для искусственного увеличения межфазной границы. Согласно теории капиллярности Лапласа давление фаз, окружающих включение радиуса *R* в условиях равновесия, определяется (см., например, [47]) уравнениями вида

$$P_{\nu}(\rho) - P^{\text{sat}} = \eta \frac{\rho_{\nu}^{\text{sat}}}{\rho_{l}^{\text{sat}} - \rho_{\nu}^{\text{sat}}} \frac{2\sigma}{R},$$
(63)

$$P_{l}(\rho) - P^{\text{sat}} = \eta \frac{\rho_{l}^{\text{sat}}}{\rho_{l}^{\text{sat}} - \rho_{v}^{\text{sat}}} \frac{2\sigma}{R},$$
(64)
где

$$\eta = \begin{cases}
+1 \ для \ капель, \\
-1 \ для \ пузырьков.
\end{cases}$$
(65)

Как показано в [11], эти давления таковы, что одна из фаз находится в метастабильном состоянии, т. е. попадает в бинодальный интервал, где уравнение состояния модифицировано. Поэтому соотношения (63) и (64) не могут быть проверены, и соотношения Лапласа нарушаются для модифицированного уравнения состояния.

Равновесное состояние сферических включений, описываемых в соответствии с теорией второго градиента, имеет вид [48]

$$P_{l}(\rho) - P_{\nu}(\rho) = 2\int_{0}^{\infty} \lambda \frac{\left(\frac{dp}{dr}\right)^{2}}{r} dr.$$
 (66)

Это соотношение является общим, и если радиус включения больше толщины межфазной границы, оно удовлетворяет соотношению Лапласа. Таким образом, соотношение Лапласа не нарушается при введении модифицированного уравнения состояния.

Кроме того, поскольку рассматриваемая модифицированная термодинамика такова, что функция $\frac{dP}{d\rho}(\rho)$ непрерывна, особенно на биноидальной кривой, анализ, основанный на разложении в ряд Тейлора первого порядка по величине $\frac{2\sigma}{R}$, показывает, что уравнения (63) и (64) удовлетворяют любой модифицированной термодинамике. Влияние модификации уравнения состояния проявляется только в том случае, если разложение в ряд Тейлора выполнено вплоть до третьего порядка:

$$P_{l,v}^{\text{mod}}(\rho) - P_{l,v}(\rho) = \xi^{\text{sat}} \left(\frac{2\sigma}{R}\right)^3,$$
(67)

где

$$\begin{cases} \xi^{\text{sat}} \triangleq \eta \frac{\rho_l^{\text{sat}} \rho_v^{\text{sat}}}{6\rho_p^{\text{sat}} \left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right)^4} \frac{\frac{d^2 \mu^{\text{mod}}}{d\rho^2} \left(\rho_p^{\text{sat}}\right) - \frac{d^2 \mu}{d\rho^2} \left(\rho_p^{\text{sat}}\right)}{\left[\frac{d^2 \mu}{d\rho^2} \left(\rho_p^{\text{sat}}\right)\right]^3}, \\ \rho_p^{\text{sat}} \triangleq \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right) - \eta \left(\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}}\right)}{2}. \end{cases}$$
(68)

Здесь $P_{l,v}$ — давление либо жидкой, либо парообразной фазы при немодифицированной термодинамике; $P_{l,v}^{mod}$ — давление для модифицированного уравнения состояния.

Предположим, что в любом случае приемлемо делать ошибку $\epsilon \leq \epsilon_{\rm lim}\,$ по абсолютному уровню давления, где

$$\varepsilon = \frac{\left| \frac{P_{l,v}^{\text{mod}}(\rho) - P_{l,v}(\rho)}{\frac{2\sigma}{R}} \right|.$$
(69)

Уравнения (67) и (69) показывают, что включения, чьи радиусы больше предельного радиуса $R_{\rm lim}$, определяемого соотношением (70), вносят ошибку ε меньше, чем $\varepsilon_{\rm lim}$.

$$R_{\rm lim} = 2\sigma \sqrt{\left|\xi^{\rm sat}\right|} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\rm lim}}}.$$
 (70)

Характерные величины $2\sigma \sqrt{|\xi^{sat}|}$ для воды представлены в [11] для разных значений температуры и искусственной толщины межфазной зоны в условиях равновесия. Показано, что если $\varepsilon_{lim} = 10^{-4}$ и искусственная толщина межфазной границы h = 0,1 мм при температуре на 1 K ниже критической точки, то радиус включений, которые будут удовлетворять критерию (т. е. $\varepsilon < 10^{-4}$), должен быть больше 1 мм. Для радиуса меньше 1 мм уровень давления, окружающий интерфейсную границу, не будет удовлетворять критерию по ε , даже если соотношение Лапласа будет всегда выполняться.

Далее необходимо проанализировать влияние изменения термодинамических свойств на скорость перемещения интерфейсной зоны в процессе межфазных превращений.

Рассмотрим стационарную одномерную изотермическую задачу: внизу расчетной области — неподвижная стенка, вверху — поршень, снизу под поршнем находится пар, к фиксированной стенке примыкает жидкость. Поверхность раздела «пар — жидкость» расположена примерно посередине высоты расчетной области. Заметим, что фазовые переходы существуют даже в изотермических системах. Фазовые изменения в этом случае обусловлены вакуумом. Когда поршень движется назад, давление пара уменьшается, и термодинамическое равновесие жидкой и газообразной фаз нарушается. Для возврата к состоянию термодинамического равновесия некоторое количество жидкости должно испариться. При испарении потребляется энергия, которая передается к интерфейсной границе через кондуктивные тепловые потоки. Эти потоки требуют ненулевых температурных градиентов. В данном разделе предполагается, что теплопроводность велика, а фазовые переходы медленные, и фазы можно рассматривать как изотермические. Подробные условия, при которых это предположение справедливо, можно найти в [40].

Если скорости поршня и стенок постоянны, то постоянна и скорость перемещения межфазной границы, и она определяется уравнением сохранения масс:

$$V^{i} = \frac{\rho_{l} V_{l} - \rho_{v} V_{v}}{\rho_{l} - \rho_{v}}.$$
(71)

Объемные плотности ρ_i и ρ_y таковы, что [12]:

$$\begin{cases} P(\rho_{\nu}) = P^{\text{sat}} - \frac{m_c^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\nu}^{\text{sat}}} - \frac{1}{\rho_l^{\text{sat}}} \right), \\ P(\rho_{l\nu}) = P^{\text{sat}} + \frac{m_c^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_{\nu}^{\text{sat}}} - \frac{1}{\rho_l^{\text{sat}}} \right), \end{cases}$$
(72)

где

$$m_{c} \triangleq \rho_{l} \left(V_{l} - V^{i} \right) = \rho_{v} \left(V_{v} - V^{i} \right).$$
(73)

Уравнения (72) показывают, что жидкость переохлаждена, а пар перегрет, поэтому характеристические точки фаз расположены вне бинодальной кривой.

Эту одномерную изотермическую стационарную проблему можно изучать с помощью модели второго градиента, и давления фаз определяются соотношениями

$$\begin{cases} P(v_{l}) - \left[P(v_{v}) - m^{2}(v_{l} - v_{v}) \right] = 0, \\ \int_{v_{v}} \left\{ P(v) - \left[P(v_{v}) - m^{2}(v - v_{v}) \right] \right\} dv = 0, \end{cases}$$
(74)

где $v = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем; $m \triangleq \rho V = \text{const}$.

Уравнения (74) — обобщение правила Максвелла [49] в присутствии переноса массы через межфазную границу [43]. Подчеркнем, что эти соотношения удовлетворяют любому уравнению состояния P(v).

Уравнения (74) могут быть разложены в ряд Тейлора первого порядка по m^2 , что приведет точно к (72) (где \dot{m}_c заменяется на \dot{m}). Поскольку эти соотношения подразумевают, что фазы не являются метастабильными, любое искусственное увеличение межфазной границы не изменяет объемных фазовых плотностей.

В то же время, поскольку скорости поршня и стенки V_l и V_v являются параметрами проблемы, скорость смещения интерфейсной границы, определяемой соотношением (71), не изменяется посредством ее искус-ственного расширения.

Метод второго градиента предсказывает изменение коэффициента поверхностного натяжения, связанное с переносом потока массы через межфазную границу согласно [43]. Поэтому необходимо знать, как увеличение толщины межфазной границы изменяет коэффициент поверхностного натяжения.

На рис. 2 показаны профили интерфейсной плотности при температуре на 1 К ниже критической точки для различных потоков массы, пересекающих межфазную границу: для уравнения состояния Ван-дер-Ваальса и для модифицированного уравнения состояния. Эти профили показывают, что в случае модифицированного уравнения состояния межфазная толщина более чувствительна к межфазному переносу массы, чем в случае вандерваальсового уравнения состояния. Эта повышенная чувствительность имеет два недостатка: во-первых, если массовый поток слишком велик, то межфазная толщина не может быть зафиксирована, во-вторых, внесенное изменение поверхностного натяжения может исказить физическую достоверность моделируемого явления. Разложение в ряд Тейлора с первым порядком по \dot{m}^2 для профиля плотности показывает, что межфазная толщина и поверхностное натяжение могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$\frac{h-h^{\text{sat}}}{h^{\text{sat}}} = -m^2 h^{\text{sat}} \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right)^2}{4\sigma^{\text{sat}}\rho_l^{\text{sat}}\rho_v^{\text{sat}}\left(\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}}\right)},$$
(75)

$$\frac{\sigma - \sigma^{\text{sat}}}{\sigma^{\text{sat}}} = m^2 h^{\text{sat}} \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right)^2}{4\sigma^{\text{sat}}\rho_l^{\text{sat}}\rho_v^{\text{sat}}\left(\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}}\right)}.$$
(76)

Линейное изменение межфазной толщины объясняет разницу между профилями на рис. 2*a* и 2*б*.

Уравнения (75) и (76) должны помочь ответить на вопрос, уместен ли предложенный метод для численного моделирования. Предположим, что относительная ошибка в значении поверхностного натяжения равна 1%. При температуре на 1 К ниже критической точки это означает, что интерфейсный поток массы должен быть ниже, чем $7 \, {\rm krm}^2 {\rm c}^{-1}$, что соответствует скорости поршня, равной примерно 5, 4 мм $\cdot {\rm c}^{-1}$. Это величина слишком мала для физических параметров, используемых при численном моделировании. Единственное решение состоит в том, чтобы изменить размер сетки так, чтобы искусственная толщина интерфейса могла быть уменьшена.

Когда межфазная граница «жидкость — пар» моделируется как разрывная поверхность, обычно предполагается, что температура на границе равна температуре насыщения. В теории второго градиента температура в межфазной зоне определяется путем решения уравнений (48)—(50), и, следовательно, нужно знать, насколько температура в межфазной зоне близка к температуре насыщения.

Давайте рассмотрим одномерную систему «жидкость — пар»при механическом равновесии, при котором парообразная фаза перегрета на ΔT , а жидкая фаза переохлаждена на ту же температуру ΔT (рис. 3). Тогда профиль плотности должен быть таким, чтобы интерфейсная зона автоматически располагалась там, где достигается температура насыщения.



Рис. 2. Эволюция профиля плотности с интерфейсным потоком массы (в кг/м²с⁻¹) при температуре на 1 К ниже критической точки:

- а термодинамика Ван-дер-Ваальса (обращаем внимание на симметричный эффект влияния давления на плотности фаз);
- δ измененная термодинамика такова, что искусственная толщина поверхности раздела в равновесии равна 1 мм



Рис. 3. Схема одномерного теплопереноса через интерфейсную зону «жидкость — пар» при механическом равновесии

Эта проблема требует решения уравнения баланса движения и энергии — см. уравнения (49) и (50).

$$\frac{dP}{dz} = \lambda \rho \frac{d^3 P}{dz^3},\tag{77}$$

$$\frac{d}{dz}\left(k\frac{dT}{dz}\right) = 0.$$
(78)

Здесь коэффициент капиллярности λ предполагается постоянным, а коэффициент теплопроводности k априори есть функция плотности.

Связь между уравнениями (77) и (78) обычно устанавливается через зависимость давления от температуры, т. е. через уравнение состояния жидкости.

Типичные профили плотности и температуры для уравнения состояния Ван-дер-Ваальса, а также для модифицированного уравнения состояния представлены на рис. 4. В обоих случаях можно видеть, что температура насыщения достигается внутри межфазной зоны.



Рис. 4. Профили плотности и температуры поперек поверхности раздела «жидкость — пар» при механическом равновесии пересеклись постоянным тепловым потоком: *а* — уравнение состояния Ван-дер-Ваальса; б — модифицированное уравнение состояния, для которого толщина поверхности раздела в равновесии равна 10⁻⁴ м

Однако когда тепловой поток увеличивается вследствие увеличения температурной разности ΔT , межфазная толщина варьируется, что приводит также к вариациям поверхностного натяжения (рис. 5).



Рис. 5. Профили плотности через искусственно расширенный интерфейс «жидкость — пар» ($h^{\rm sat}=10^{-5}~{\rm M}$) при механическом равновесии

Первая попытка объяснять это изменение может быть найдена в [40], где предполагается, что температурный градиент постоянен (т. е. k = const). Эта попытка основана на разложении в ряд Тейлора с первым порядком по ΔT и ведет к следующей аппроксимации:

$$\frac{h-h^{\text{sat}}}{h^{\text{sat}}} = -\nabla T \left(h^{\text{sat}}\right)^2 \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}}\right)}{2} \frac{\rho_v^{\text{sat}} \Lambda}{2T^{\text{sat}} \rho_l^{\text{sat}} \left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}\right) \sigma_v^{\text{sat}}} \xi \left(T^{\text{sat}}\right), \quad (79)$$

$$\frac{\sigma - \sigma^{\text{sat}}}{\sigma^{\text{sat}}} = \nabla T \left(h^{\text{sat}} \right)^2 \frac{\left(\rho_l^{\text{sat}} + \rho_v^{\text{sat}} \right)}{2} \frac{\rho_v^{\text{sat}} \Lambda}{2T^{\text{sat}} \rho_l^{\text{sat}} \left(\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}} \right) \sigma_v^{\text{sat}}} \xi \left(T^{\text{sat}} \right), \quad (80)$$

где

$$\xi(T) = \frac{2\rho_l^{\text{sat}}}{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}} \ln\left(\frac{2\rho_l^{\text{sat}}}{\rho_l^{\text{sat}} - \rho_v^{\text{sat}}}\right) - 1.$$
(81)

Уравнения (79)—(80) показывают, что относительные изменения межфазной толщины и поверхностного натяжения линейно зависят от градиента температуры в пределах межфазной зоны и имеют квадратичную зависимость от толщины межфазной границы при равновесии. Эти изменения поэтому более чувствительны к толщине межфазной границы в условиях равновесия по сравнения с изменениями, вызванными потоком массы. Jamet [40] показал, что уравнения (79) и (80) верно определяют зависимости от ∇T и $h^{\rm sat}$, но множитель пропорциональности недооценен с коэффициентом в диапазоне от 2 до 3 для воды.

В качестве примера предположим, что по любой причине приемлема относительная ошибка в размере 1% по величине поверхностного натяжения. Для задачи из рис. З при температуре на 1 К ниже критической точки температурный градиент около интерфейса должен быть ниже 0,65 К/м, что соответствовало бы максимальной величине кондуктивного теплового потока сквозь перегретый пар и переохлажденную жидкость, равной приблизительно 0,2 Bт/м², и искусственной толщине интерфейса 10^{-5} м. Если рассмотренная здесь величина много меньше, чем физические параметры численной задачи, то необходимо увеличить сеточное разрешение, чтобы уменьшить искусственную толщину межфазной границы.

Эта особенность может иногда быть ограничена. Например, при моделировании, рассматриваемом в [6, с. 673], существующий метод мог использоваться с толщиной интерфейса, равной по крайней мере 0,25 мм, если относительная ошибка по поверхностному натяжению была меньше 1%. Метод второго градиента требовал бы сеточного шага приблизительно в 10 раз меньше, чем использованный в [6], с наиболее подробным разрешением, который препятствовал бы локальному сеточному сгущению.

Подводя итог сказанному о методе второго градиента, можно обобщить, что толщина межфазной границы, как и поверхностное натяжение, является функцией потока масс и температурного градиента через интерфейс. Вариации этих величин растут с толщиной интерфейса, а это означает, что ограничения тепло и массообмена через интерфейс могут быть промоделированы с помощью данного метода.

Вопреки этим ограничениям метод может успешно использоваться как в одном, так и в двух измерениях. Его основные преимущества состоят в том, что он имеет ясное и сильное теоретическое объяснение и что топологические изменения и перемещение контактных линий обрабатываются очень легко. Кроме того, переход от двух измерений к трем непосредственно сравнен с другими методами. Однако необходимо провести работу, чтобы удостовериться, что этот метод может применяться в широком диапазоне приложений. Кроме того, будут требовать ответа другие более фундаментальные вопросы, такие как влияние расширения интерфейса на движении линии контакта и зависимость результатов от численной разрешающей способности и толщины интерфейса.

3. Методы, основанные на использовании уравнений состояния stiffened

В настоящее время имеется целый ряд различных математических моделей и реализующих их численных схем, описывающих поведение многофазных сжимаемых сред. При этом моделирование двухфазных сред с использованием процедуры усреднения системы дифференциальных уравнений в частных производных приводит к некорректной постановке задачи. Разные уравнения состояния фаз по обе стороны интерфейсной поверхности раздела (интерфейса) являются основной проблемой при оценке величины давления на интерфейсе.

Простой численный метод второго порядка точности для решения системы уравнений Эйлера, описывающий двухфазную сжимаемую среду с уравнением состояния газа stiffened, был предложен в [49]. Этот метод основывается на применении схемы Годунова с использованием приближенного римановского солвера для аппроксимации значений переменных на границах ячеек в консервативных и неконсервативных уравнениях. В данном подходе межфазные интерфейсы рассматриваются как диффузионные области, и распад разрыва вычисляется в однофазной среде, но параметры уравнения состояния в диффузионной зоне вычисляются согласованно с плотностью, импульсом и энергией из уравнений адвекции. Модель, состоящая из пяти уравнений, включает три уравнения Эйлера и два уравнения переноса для параметров уравнения состояния. В каждой ячейке расчетной области двухфазная среда характеризуется значениями давления, плотности, скорости и параметров уравнения состояния. Метод позволяет выполнять двумерные и трехмерные расчеты для интерфейсных границ раздела беспримесных сред. Граница раздела фаз определяется при помощи введения «колорной» функции.

Другая двухфазная модель, предложенная в [50] и получившая развитие в [51], в одномерном случае включает семь уравнений. Каждая фаза описывается тремя уравнениями, полученными из законов сохранения, и имеет собственные значения термодинамических параметров и уравнение состояния. Седьмое уравнение описывает эволюцию объемной доли. В данном подходе в каждой ячейке расчетной области решается одна и та же система уравнений с применением численного алгоритма, использующего приближенный римановский солвер. Метод позволяет моделировать эволюцию газодинамических течений на интерфейсной границе как между беспримесными средами, так и между двухфазными смесями. Однако и в этом случае возникают проблемы, связанные с численной аппроксимацией неконсервативных членов при наличии контактных разрывов и ударных волн [50]. Кроме того, конструирование конвективных потоков с учетом семи волн является громоздкой процедурой с точки зрения программной реализации [51; 52].

В модели DEM (Discrete Equation Method) [53] отмеченные выше недостатки преодолеваются благодаря более глубокому анализу топологии двухфазных потоков. Численная схема позволяет получать корректное решение также при прохождении ударных волн через области с резкими градиентами объемной доли. Используемый римановский солвер описывает взаимодействие фаз на каждой интерфейсной границе раздела сред. Каждая фаза описывается тремя уравнениями, полученными из законов сохранения, и имеет собственные значения термодинамических параметров и уравнение состояния. Вычисление потоков осуществляется с использованием процедуры усреднения по различным возможным топологическим реализациям состояния двухфазной среды на интерфейсе. Также достигается корректная аппроксимация неконсервативных членов и дополнительных связей, определяющих релаксацию давлений и скоростей в двухфазной среде. В результате данная модель не нуждается во введении дополнительных параметров. В одномерном случае метод включает семь уравнений и легко обобщается на случай двумерных и трехмерных расчетов.

При распространении сильных волн разрежения через находящуюся в термодинамическом равновесии жидкость возможен переход данной жидкости в метастабильное состояние. Температура жидкости может превысить температуру насыщения при уменьшенном за счет прохождения волны разрежения давлении. Такая перегретая жидкость изменяет свое фазовое состояние очень быстро, взрывообразно. В результате может образовываться либо чистый пар, либо смесь жидкости и пара в термодинамическом равновесии, движущихся с большой скоростью. Это явление называется кавитацией. Кавитация часто возникает при обтекании сверхзвуковых снарядов и аэродинамических поверхностей или на внутренних соплах в инжекторных двигателях. Этот процесс может приводить к сильным и резким возмущениям в гидродинамических системах. В большинстве случаев благодаря геометрическим эффектам кавитация является двумерным или трехмерным процессом, что сильно затрудняет ее экспериментальное и теоретическое изучение. Экспериментальное исследование фронта испарения [54] показывает, что он имеет возмущенную ячеистую разрывную структуру. Характерный размер фронта меняется в диапазоне примерно от 1 мм до 1 мкм. Эта величина крайне мала по сравнению с размерами большинства индустриальных систем. Толщина граничного теплового слоя с обеих сторон фронта также очень мала — порядка 1 мкм. Численные исследования структуры фронта взрывного испарения [55] позволяют при моделировании кавитации рассматривать фронт как разрыв без анализа его внутренней структуры.

Для моделирования взрывных процессов испарения в двухфазных средах была разработана модель RDEM (Reactive Discrete Equation Method) [56]. В таких процессах ударной волне, контактному разрыву и фронту испарения всегда предшествует акустическая волна. Такая конфигурация называется в литературе реактивным римановским солвером. Численные решения этой задачи были получены при расчетах детонации и дефлаграции (горения) для уравнений состояния идеального газа [57; 58]. В случае моделирования процесса испарения решение будет иметь более сложный вид.

Так как фронт испарения рассматривается как разрыв, а среды по обеим сторонам разрыва описываются уравнениями Эйлера, то для значений термодинамических параметров с обеих сторон фронта справедливы соотношения Рэнкина—Гюгонио, выражающие сохранение массы, импульса и энергии. Для разрешения неопределенности, которая возникает при прохождении первой акустической волны, требуется дополнительное кинетическое соотношение. Оно определяет скорость фронта испарения и обеспечивает единственность решения реактивного римановского солвера.

Вследствие взрывного характера испарения сильно перегретой жидкости в качестве дополнительного кинетического соотношения в [56] используется условие, связанное с максимально возможной скоростью перетекания массы через фронт испарения. Это условие называется точкой дефлаграции Чэпмена—Жуге. Расчеты фронтов испарения и дефлаграции в данном подходе идентичны в смысле принадлежности обоих фронтов к одной и той же ветке кривой Круссарда. В [59] приведено сравнение экспериментальных данных для распада разрыва в додекане с результатами расчета с использованием соотношений Рэнкина—Гюгонио и замыкающего кинетического соотношения СЈ. Хорошее согласие экспериментальных результатов с расчетными кривыми также является основанием для выбора данного кинетического соотношения. Для замыкания законов сохранения с обеих сторон фронта испарения необходимо уравнение состояния. Так как фронт разделяет жидкость и чистый пар в случае полного испарения или жидкость и смесь «жидкость — пар» в случае частичного испарения, в первом случае используются уравнения состояния чистой жидкости и чистого пара, а во втором уравнение состояния чистой жидкости и гомогенное уравнение состояния смеси «жидкость — пар» в термодинамическом равновесии. Уравнения состояния чистого пара и жидкости сильно зависимы в термодинамическом равновесии. Комбинация этих уравнений совместно с условиями равенства давлений, температур и химического потенциала должна воспроизводить фазовую диаграмму или кривую давления насыщенного пара в зависимости от температуры $P = P_{S_{AT}}(T)$. Несмотря на хорошее согласие с экспериментальными данными, модель RDEM очень громоздка и применима лишь для моделирования испарения в сильно перегретой жидкости. Кроме того, модель [56] не позволяет различить структуру фронта волны испарения, которая рассматривается как разрыв.

Для расчета процессов более умеренного испарения и разрешения структуры фронта волны испарения была адаптирована модель из пяти уравнений [60]. Она состоит из двух уравнений сохранения массы, уравнения сохранения полного импульса двухфазной смеси, уравнения сохранения полной энергии двухфазной смеси и уравнения для объемной доли. Каждая фаза имеет одинаковые величины давления и скорости, но отличные значения температуры и химического потенциала. Другими словами, двухфазная система находится в состоянии динамического равновесия, а равенство температур и химических потенциалов достигается только вблизи фронта испарения в результате процесса мгновенной релаксации. Конструирование кинетических соотношений в присутствии теплообмена и массопереноса, которые позволяют рассчитать процессы релаксации, является основой новой модели [61]. Однако данная модель обладает рядом недостатков. Присутствие неконсервативного члена в уравнении переноса объемной доли, что является следствием равенства давлений, может приводить к ее отрицательным значениям при расчетах сильных ударных волн или волн разряжения. Также немонотонная зависимость скорости звука от объемной доли приводит к ошибкам в вычислениях распространения волн через границу раздела фаз [62].

Для повышения робастности вычислительной модели [60; 61] условие равенства давлений каждой из фаз было исключено для исходной модели из пяти уравнений. В результате была получена модель из шести уравнений [63], включающая уравнение переноса для объемной доли, два уравнения сохранения массы, уравнение сохранения полного импульса двухфазной смеси, два уравнения сохранения внутренней энергии каждой из фаз смеси. Кроме того, было использовано дополнительное соотношение, описывающее сохранение полной энергии двухфазной смеси, необходимое для правильного моделирования ударных волн в однофазном пределе. Введение этого соотношения существенно упрощает алгоритм численного решения. Равенство давлений достигается с использованием процесса релаксации. Модель из шести уравнений обеспечивает положительность объемной доли и монотонность скорости звука.

Литература

- Lafaurie B., Nardone C., Scardovelli R. et al. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER // J. Comput. Phys. — 1994. — Vol. 113. — P. 134.
- Unverdi S. O., Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 100. P. 25.
- 3. *Sethian J. A.* Level Set Methods. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1996.
- 4. *Juric D.* Computations of Phase Change: Ph.D. thesis / Univ. of Michigan. [S. l.], 1996.
- Juric D., Tryggvason G. A Front-Tracking Method for Dendritic Solidification // J. Comput. Phys. — 1996. — Vol. 123. — P. 127—148.
- 6. *Welch S. W. J., Wilson J.* A volume of fluid based method for fluid flows with phase change // J. Comput. Phys. 2000. Vol. 160. P. 662.
- Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // J. Comput. Phys. — 1992. — Vol. 100. — P. 335.
- Beux F., Knowlton B., Banerjee S. A three-dimensional level-set method for direct numerical simulation of two-phase flows in variable gravity environments // Proceedings of the 4th Micro-gravity Fluid Physics and Transport Phenomena Conference, Clevland. — [S. 1.], 1998.
- Jamet D., Lebaigue O., Coutris N., Delhaye J. M. A numerical description of a liquid-vapor interface based on the second gradient theory // Fluid Mech. Res. — 1997. — Vol. 22 (1). — P. 1.
- 10. Juric D., Tryggvason G. Computations of boiling flows // Int. J. Multiphase Flow. — 1998. — Vol. 24. — P. 387.
- Jamet D., Lebaigue O., Coutris N., Delhaye J. M. The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid–vapor flows with phase change // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 169. — P. 624—651.

- 12. Son G., Dhir V. K., Ramanujapu N. Dynamics and heat transfer associated with a single bubble during nucleate boiling on a horizontal surface // J. Heat Transfer. 1999. Vol. 121, № 3. P. 623.
- Tryggvason G., Bunner B., Esmaeeli A. et al. A front tracking method for the computations of multiphase flow // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 169. — P. 708. — (doi:10.1006/jcph.2001.6726).
- Qian J., Tryggvason G., Law C. K. A front tracking method for the motion of premixed flames // J. Comput. Phys. — 1998. — Vol. 144. — P. 52.
- Helenbrook B. T., Martinelli L., Law C. K. A numerical method for solving incompressible flow problems with a surface of discontinuity // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 148. — P. 366. — (doi:10.1006/jcph.1998.6115).
- Nguyen D. Q., Fedkiw R. P., Kang M. A boundary condition capturing method for incompressible flame discontinuities // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 172. — P. 71. — (doi:10.1006/jcph.2001.6812).
- Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150. — P. 425—467.
- Gavrilyuk S., Saurel R. Mathematical and numerical modeling of twophase compressible flows with micro-inertia // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 175 (1). — P. 326—360.
- Saurel R., Abgrall R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. Vol. 186. P. 361—396.
- Colella P.; Woodward P. R. Piecewise parabolic method (PPM) for gasdynamic simulations // J. Comput. Phys. — 1984. — Vol. 54 (1). — P. 174—201.
- 21. *Ishii M*. Thermo-fluid Dynamics Theory of Two-phase Flow. Paris: Eyrolles, 1975.
- Morel C., Goreaud N., Delhaye J. M. The local volumetric interfacial area transport equation: derivation and physical significance // Intern J. Multiphase Flow. — 1999. — Vol. 25. — P. 1099.
- 23. Rider W. J., Kothe D. B. Reconstructing volume tracking // J. Comput. Phys. — 1998. — Vol. 141. — P. 112.
- Juric D., Shin S., Tryggvason G. Direct Numerical Simulations of Nucleate Boiling // 6th International Conference on Multiphase Flow, ICMF 2007, Leipzig, Germany, July 9–13, 2007.
- Osher S., Fedkiw R. P. Level set methods: an overview and some recent results // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 169. — P. 463.
- Jacqmin D. Calculation of two-phase Navier–Stokes flows using phasefield modelling // J.Comp.Phys. — 1999. — Vol. 155. — P. 96.

- 27. Noh W., Woodward P. Simple line interface method (SLIC) // Proc. 5th International Conference on Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics / A. van de Vooren, P. Zandbergen (eds.). — Vol. 59. — Berlin: Springer, 1976.
- 28. Rider W. J., Kothe D. B., Mosso S. J. et al. Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions. — [S. 1.], 1995. — (AIAA Paper 95-0699).
- 29. *Rider W. J., Kothe D. B.* Reconstructing volume tracking // J. Comput. Phys. 1998. Vol. 141. P. 112.
- Fulgosi M., Lakehal D., Banerjee S., Yadigaroglu G. Direct numerical simulation of turbulence and interfacial dynamics in counter-current airwater flows (Procs. DLES-4) // Direct and Large-Eddy Simulation IV / B. J. Geurts, R. Friedrich, O. Métais (eds.). — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2001. — P. 443—452. — (ERCOFTAC Series; vol. 8).
- 31. Carey V. P. Liquid–Vapor Phase-Change Phenomena. Washington: Hemisphere Publ. Corporation, 1992.
- Delhaye J. M. Jump conditions and entropy sources in two-phase systems. Local instant formulation // Int. J. Multiphase Flow. — 1974. — Vol. 1. — P. 395.
- 33. van der Waals D. Thermodynamische Theorie der Kapillarität unter Voraussetzung stetiger Dichteanderung // Z. Phys. Chem. 1894. Vol. 13. P. 657. English translation: J. Stat. Phys. 1979. Vol. 20. P. 197.
- 34. Korteweg D. J. Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité considérables mais continues et sur la théorie de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de la densité // Arch. Néerl. Sci. Exactes Nat. — 1901. — Vol. 6. — P. 1.
- 35. *Cahn J. W., Hilliard J. E.* Free energy of a nonuniform system. 1: Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28 (2). P. 258.
- 36. Rocard Y. Thermodynamique. Paris: Masson, 1967.
- Reese J. M., Woods L. C., Thivet F. J. P., Candel S. A second-order description of shock structure // J. Comput. Phys. 1995. Vol. 117. P. 240.
- 38. Seppecher P. Moving contact line in the Cahn–Hilliard theory // Int. J. Eng. Sci. — 1996. — Vol. 34 (9). — P. 977.
- Casal P., Gouin H. Relation entre l'équation de l'énergie et l'équation du mouvement en théorie de Korteweg de la capillarité // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1985. — Vol. 300 (7). — P. 231.
- 40. *Jamet D*. Etude des potentialites de la théorie du second gradient pour la simulation numérique directe des écoulements liquide-vapeur avec changement de phase: Ph.D. thesis / Ecole Central. Paris, 1998.

- Seppecher P. Etude d'une modélisation des zones capillaires fluides: Interfaces et lignes de contact: Ph.D. thesis / Univ. Paris VI. — Paris, 1987.
- 42. Jamet D., Lebaigue O., Coutris N., Delhaye J. M. A numerical description of a liquid-vapor interface based on the second gradient theory // Fluid Mech. Res. — 1997. — Vol. 22 (1). — P. 1.
- Casal P., Gouin H. Sur les interfaces liquide-vapeur non isothermes // J. Méc. Théorique Appliquée. — 1988. — Vol. 7 (6). — P. 689.
- 44. Gouin H., Delhaye J. M. Materialwaves of a fluid in the vicinity of the critical point // IUTAM Symposium on Waves in Liquid/Gas and Liquid/Vapour Two-Phase Systems / Ed. by S. Morika and L. van Wijngaarden. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1995. — P. 405.
- 45. *Rowlinson J. S., Widom B.* Molecular Theory of Capillarity. New York: Oxford Univ. Press, 1982.
- 46. Jacqmin D. An energy approach to the continuum surface tension method // Proceedings of the 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. [S. 1.], 1996. (AIAA 96-0858).
- Carey V. P. Liquid–Vapor Phase-Change Phenomena: An Introduction to the Thermophysics of Vaporisation and Condensation Processes in Heat Transfer Equipment. — Washington, DC: Hemisphere Publ., 1992.
- Dell'Isola F., Gouin H., Rotoli G. Nucleation of spherical shell-like interfaces by second gradient theory: Numerical simulations // Eur. J. Mech. B/Fluids. — 1996. — Vol. 15 (4). — P. 545.
- 49. Brosh T., Levy A. Implementation of combined computational fluid dynamic (CFD) and discrete element method (DEM) for simulating multiphase flows // Book of abstracts of 49th European Two-Phase Group Meeting 2011, 29th May — 2nd June. — [S. 1.], 2011. — P. 27.

Метод дискретных уравнений для двумерных расчетов двухфазных течений

1. Введение

Существует целый ряд различных математических моделей и реализующих их численных схем, описывающих поведение многофазных сжимаемых сред. Многие из методов моделирования двухфазных сред основываются на процедуре усреднения системы дифференциальных уравнений с частными производными, что приводит к некорректной постановке задачи. Различающиеся уравнения состояния фаз по разные стороны от интерфейсной поверхности раздела являются основной проблемой при оценке величины давления на интерфейсе.

В [1] был предложен простой численный метод второго порядка точности для решения системы уравнений Эйлера, описывающий двухфазную сжимаемую среду с уравнением состояния газа stiffened. Этот метод основывается на применении схемы Годунова с использованием приближенного римановского солвера для аппроксимации значений переменных на границах ячеек в консервативных и неконсервативных уравнениях. Межфазные границы (интерфейсы) рассматриваются в данном подходе как диффузионные области, и распад разрыва вычисляется в однофазной среде, но параметры уравнения состояния в диффузионной зоне вычисляются согласованно с плотностью, импульсом и энергией из уравнений адвекции. Модель включает три уравнения Эйлера и два уравнения переноса для параметров уравнения состояния. В каждой ячейке расчетной области двухфазная среда характеризуется значениями давления, плотности, скорости и параметров уравнения состояния. Данный метод позволяет выполнять двумерные и трехмерные расчеты для интерфейсных границ раздела беспримесных сред. Граница раздела фаз определяется при помощи введения «колорной» функции.

Другая двухфазная модель, включающая в себя семь уравнений в одномерном случае, была предложена в [2], а затем получила развитие в [3]. Каждая фаза описывается тремя уравнениями, полученными из законов сохранения, и имеет собственные значения термодинамических параметров и уравнение состояния. Седьмое уравнение описывает эволюцию объемной доли. В данном подходе в каждой ячейке расчетной области решается одна и та же система уравнений с применением численного алгоритма, использующего приближенный римановский солвер. Метод позволяет моделировать эволюцию газодинамических течений на интерфейсной границе как между беспримесными средами, так и между двухфазными смесями. Однако и в этом случае возникают проблемы, связанные с численной аппроксимацией неконсервативных членов при наличии контактных разрывов и ударных волн [2]. Кроме того, конструирование конвективных потоков с учетом семи волн является громоздкой процедурой [3; 4].

Преодолеть упомянутые недостатки удалось благодаря более глубокому анализу топологии двухфазных потоков в модели дискретных уравнений, или DEM (Discrete Equation Method) [5], где численная схема позволяет получать корректное решение также при прохождении ударных волн через области с резкими градиентами объемной доли. Используемый в [5] точный римановский солвер описывает взаимодействие фаз на каждой интерфейсной границе раздела сред. Каждая фаза описывается тремя уравнениями, полученными из законов сохранения, и имеет собственные значения термодинамических параметров и уравнение состояния. Вычисление потоков осуществляется с использованием процедуры усреднения по различным возможным топологическим реализациям состояния двухфазной среды на интерфейсе. Также достигается корректная аппроксимация неконсервативных членов и дополнительных связей, определяющих релаксацию давлений и скоростей в двухфазной среде. В результате DEM не нуждается во введении дополнительных параметров. В одномерном случае этот метод включает семь уравнений и легко обобщается на случай двумерных и трехмерных расчетов.

В данной работе метод DEM применяется для расчетов двумерных и одномерных двухфазных сжимаемых течений с использованием точного римановского солвера [6]. Второй порядок вводится при помощи стандартного алгоритма MUSCL [13]. Приводятся результаты расчетов как одномерных (задача Сода, кавитация), так и двумерных (задача Сода с разрывом тангенциальной скорости, адвекция газовой капли в однородной жидкой среде, взаимодействие ударной волны с неоднородной двухфазной средой) задач.

2. Описание метода

Методика DEM для одномерных расчетов двухфазных сжимаемых течений подробно изложена в [5]. В настоящей работе одномерные расчеты проводились согласно описанной там методике. Единственным отличием является использование не приближенного, как в [5], а точного римановского солвера.

Адаптация методики DEM для двумерных расчетов двухфазных сжимаемых течений выполнялась с использованием процедуры расщепления по направлениям и условия сохранения однородности профилей давления и скорости [7]. Далее приводятся основные этапы построения консервативной схемы первого порядка [8]. Переход ко второму порядку описан в следующей части.

Консервативная форма уравнений, которые описывают каждый компонент двухфазной среды, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U = (1, \rho, \rho u, \rho \vartheta, \rho E)^T$; P — давление; ρ — плотность; u — X-компонента скорости; ϑ — Y-компонента скорости; $E = e + 0, 5 \times (u^2 + \vartheta^2)$ — полная энергия; $e = e(\rho, P)$ — внутренняя энергия; $F(U) = [0, \rho u, \rho u^2 + P, \rho u \vartheta, (\rho E + P) u]^T$; $G(U) = [0, \rho \vartheta, \rho \vartheta u, \rho \vartheta^2 + P, (\rho E + P) \vartheta]^T$.

В (1) первое соотношение $\frac{\partial 1}{\partial t} + \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$ используется для введения уравнения переноса характеристической функции X_{α} фазы α . Характеристическая функция $X_{\alpha}(t, x, y) = 1$, если точка (x, y) принадлежит фазе α в момент времени t, и $X_{\alpha}(t, x, y) = 0$ в противоположном случае. Эта функция удовлетворяет двумерному уравнению переноса

$$\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial t} + \sigma_x \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial y} = 0,$$
(2)

где σ_x и σ_y — компоненты локальной интерфейсной скорости [9]. Умножая систему (1) на характеристическую функцию X_{α} , можно получить с учетом (2)

$$\frac{\partial X_{\alpha}U_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial X_{\alpha}F_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial X_{\alpha}G_{\alpha}}{\partial y} =$$

$$= \left(F_{\alpha} - \sigma_{x}U_{\alpha}\right)\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x} + \left(G_{\alpha} - \sigma_{y}U_{\alpha}\right)\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial y}.$$
(3)

Для численного решения системы (3) можно применить процедуру расщепления по направлениям. Тогда часть системы (3), соответствующая Хнаправлению, будет иметь вид

$$\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial t} + \sigma_{x} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial X_{\alpha} W_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial X_{\alpha} F_{\alpha}}{\partial x} = \left(F_{\alpha} - \sigma_{x} W_{\alpha}\right) \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x},$$
(4)

где

$$W_{\alpha} = \left(\rho_{\alpha}, \rho_{\alpha}u_{\alpha}, \rho_{\alpha}\vartheta_{\alpha}, \rho_{\alpha}E_{\alpha}\right)^{T},$$

$$F_{\alpha}\left(W_{\alpha}\right) = \left[\rho_{\alpha}u_{\alpha}, \rho_{\alpha}u_{\alpha}^{2} + P_{\alpha}, \rho_{\alpha}u_{\alpha}\vartheta_{\alpha}, \left(\rho_{\alpha}E_{\alpha} + P_{\alpha}\right)u_{\alpha}\right]^{T}.$$

Аналогично для Ү-направления:

$$\begin{cases} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial t} + \sigma_{y} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial X_{\alpha} W_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial X_{\alpha} G_{\alpha}}{\partial y} = \left(G_{\alpha} - \sigma_{y} W_{\alpha}\right) \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial y}, \end{cases}$$
(5)

где

$$G_{\alpha}(W_{\alpha}) = \left[\rho_{\alpha}\vartheta_{\alpha}, \rho_{\alpha}\vartheta_{\alpha}u_{\alpha}, \rho_{\alpha}\vartheta_{\alpha}^{2} + P_{\alpha}, \left(\rho_{\alpha}E_{\alpha} + P_{\alpha}\right)\vartheta_{\alpha}\right]^{T}.$$

Решение системы (4) используется в качестве входных данных для системы (5) или наоборот. Для усреднения неконсервативных членов в системах (4) и (5) применяется интегрирование по времени и пространству [10]. В результате для системы (4) получаются следующие численные соотношения:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \varepsilon \left(\sigma_{x} \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x}\right)_{i,j} = 0, \\ \frac{\alpha_{i,j}^{n+1} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon \left(X_{\alpha}F_{\alpha}\right)_{i+1/2,j} - \varepsilon \left(X_{\alpha}F_{\alpha}\right)_{i-1/2,j}}{\Delta x_{i}} = \\ = \varepsilon \left(\left(F_{\alpha} - \sigma_{x}W_{\alpha}\right)\frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x}\right)_{i,j}, \end{cases}$$
(6)

где ε — процедура усреднения, которая коммутирует с временной и пространственной производными;

$$\begin{split} &\alpha_{i,j} = \varepsilon \left(X_{\alpha} \right)_{i,j} - \mathsf{объемная доля фазы } \alpha ; \\ &\left(W_{\alpha} \right)_{i,j} = \left[\left(\overline{\rho}_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\alpha} \overline{u}_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\alpha} \overline{\vartheta}_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\alpha} \overline{E}_{\alpha} \right)_{i,j} \right]^{T} ; \\ &\left(\overline{\rho}_{\alpha} \right)_{i,j} = \frac{\varepsilon \left(X_{\alpha} \rho_{\alpha} \right)_{i,j}}{\alpha_{i,j}} ; \\ &\left(\overline{u}_{\alpha} \right)_{i,j} = \frac{\varepsilon \left(X_{\alpha} \rho_{\alpha} u_{\alpha} \right)_{i,j}}{\alpha_{i,j} \left(\rho_{\alpha} \right)_{i,j}} ; \\ &\left(\overline{\vartheta}_{\alpha} \right)_{i,j} = \frac{\varepsilon \left(X_{\alpha} \rho_{\alpha} \vartheta_{\alpha} \right)_{i,j}}{\alpha_{i,j} \left(\rho_{\alpha} \right)_{i,j}} ; \\ &\left(\overline{\overline{\vartheta}}_{\alpha} \right)_{i,j} = \frac{\varepsilon \left(X_{\alpha} \rho_{\alpha} \overline{\vartheta}_{\alpha} \right)_{i,j}}{\alpha_{i,j} \left(\rho_{\alpha} \right)_{i,j}} . \end{split}$$

Средняя величина конвективного потока в (6) находится следующим образом [5]:

$$\varepsilon \left(X_{\alpha} F_{\alpha} \right)_{i+1/2,j} =$$

$$= \max \left(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}, 0 \right) \times F_{RIM} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{+} +$$

$$+ \min \left(\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1,j} \right) \times F_{RIM} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i+1,j} \right) +$$

$$+ \max \left(\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}, 0 \right) \times F_{RIM} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\gamma,\alpha)} \right)^{-},$$

$$(7)$$

где $(W_{\gamma})_{i,j} = \left[\left(\overline{\rho}_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\gamma}\overline{u}_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\gamma}\overline{\vartheta}_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(\overline{\rho}_{\gamma}\overline{E}_{\gamma}\right)_{i,j}\right]^{T}$ — средние значения параметров второй фазы γ ; $F_{RIM}\left(\left(W_{L}\right)_{i,j}, \left(W_{R}\right)_{i+1,j}\right)$ — конвективный поток на границе (i+1/2, j) ячейки (i, j), вычисленный с использованием точного римановского солвера [6] для начальных состояний W_{L} слева и W_{R} справа;

$$\begin{pmatrix} \beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \end{pmatrix}^{+} = \begin{cases} 1, \text{ если } \sigma \Big(\begin{pmatrix} W_{\alpha} \end{pmatrix}_{i,j}, \begin{pmatrix} W_{\gamma} \end{pmatrix}_{i,j+1} \Big) \ge 0, \\ 0, \text{ если } \sigma \Big(\begin{pmatrix} W_{\alpha} \end{pmatrix}_{i,j}, \begin{pmatrix} W_{\gamma} \end{pmatrix}_{i,j+1} \Big) < 0, \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} \beta_{i+1/2,j}^{(\gamma,\alpha)} \end{pmatrix}^{-} = \begin{cases} 0, \text{ если } \sigma \Big(\begin{pmatrix} W_{\gamma} \end{pmatrix}_{i,j}, \begin{pmatrix} W_{\alpha} \end{pmatrix}_{i,j+1} \Big) \ge 0, \\ 1, \text{ если } \sigma \Big(\begin{pmatrix} W_{\gamma} \end{pmatrix}_{i,j}, \begin{pmatrix} W_{\alpha} \end{pmatrix}_{i,j+1} \Big) < 0. \end{cases}$$

Средняя величина потока Лагранжа в (6) определяется следующим обра-30M:

$$\varepsilon \left(\left(F_{\alpha} - \sigma_{x} W_{\alpha} \right) \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x} \right)_{i,j} =$$

$$= -\max \left(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}, 0 \right) \times F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{-} +$$

$$+ \max \left(\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}, 0 \right) \times F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\gamma,\alpha)} \right)^{-} -$$

$$- \max \left(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}, 0 \right) \times F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i-1,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i,j} \right) \times \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{+} +$$

$$+ \max \left(\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}, 0 \right) \times F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i-1,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i,j} \right) \times \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{+} +$$

$$+ \Lambda_{i,j} \times \left(F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i,j} \right) - F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i,j} \right) \right),$$

$$(8)$$

где

 $\Lambda_{i,j}^x = \frac{\varepsilon(N_{\text{int}})_{i,j}}{\Delta x_i}$ — среднее число внутренних интерфейсов вдоль направления X в ячейке (i, j);

$$F^{\log}\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j},\left(W_{\gamma}\right)_{i+1,j}\right) =$$

$$=F_{\alpha}\left(\left(W_{\alpha}\right)^{*}\right) - \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j},\left(W_{\gamma}\right)_{i+1,j}\right) \times \left(W_{\alpha}\right)^{*} =$$

$$=F_{\gamma}\left(\left(W_{\gamma}\right)^{*}\right) - \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j},\left(W_{\gamma}\right)_{i+1,j}\right) \times \left(W_{\gamma}\right)^{*}$$
(9)

— поток Лагранжа для данной топологической реализации двухфазной смеси.

Величины, входящие в поток Лагранжа (9), находятся с использованием римановского солвера на фазовом интерфейсе $\left(W_{a}\right)^{*}$ или $\left(W_{y}\right)^{*}$.

Численное решение уравнения адвекции объемной доли из системы (6) определяется из уравнения [5]

$$\frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x_{i}} \times \\
\times \left[-\max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i+1,j}\right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{-} + \\
+\max(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i+1,j}\right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{-} - \\
-\max(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i-1,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j}\right) \times \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{+} + \\
+\max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i-1,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}\right) \times \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{+} \right] + \\
+\Lambda_{i,j}^{x} \times \left(\sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j}\right) - \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}\right)\right) = 0$$
(10)

Средняя величина потока Лагранжа из (8) может быть представлена в виде суммы вкладов от внешних и внутренних интерфейсов:

$$\varepsilon \left(\left(F_{\alpha} - \sigma_{x} W_{\alpha} \right) \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial x} \right)_{i,j} = \varepsilon \left(F^{\log} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i,j}^{\text{bound}} + \varepsilon \left(F^{\log} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i,j}^{\text{relax}}, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon \left(F^{\log} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i,j}^{\text{relax}} = \Lambda_{i,j}^{x} \times \left(F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i,j} \right) - -F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i,j} \right) \right);$$
(12)

$$\varepsilon \left(F^{\log} \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{i,j}^{\text{bound}} = = -\max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}, 0) \times F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{-} + + \max(\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}, 0) \times F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i+1,j} \right) \times \left(\beta_{i+1/2,j}^{(\gamma,\alpha)} \right)^{-} -$$
(13)

$$- \max(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}, 0) F^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i-1,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i,j} \right) \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)} \right)^{+} + + \max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}, 0) F^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i-1,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i,j} \right) \left(\beta_{i-1/2,j}^{(\gamma,\alpha)} \right)^{+} .$$

Аналогично разделяются вклады внешних и внутренних интерфейсов в уравнение адвекции объемной доли. Тогда численное решение системы (6) можно найти, последовательно вычисляя вклады от внешних и внутренних интерфейсов.

Первый шаг:

$$\frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x_{i}} \times \left[-\max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}, 0) \times \sigma((W_{\alpha})_{i,j}, (W_{\gamma})_{i+1,j}) \times (\beta_{i+1/2,j}^{(\alpha,\gamma)})^{-} + \max(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma((W_{\gamma})_{i,j}, (W_{\alpha})_{i+1,j}) \times (\beta_{i+1/2,j}^{(\gamma,\alpha)})^{-} - \max(\alpha_{i-1,j} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma((W_{\alpha})_{i-1,j}, (W_{\gamma})_{i,j}) \times (\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)})^{+} + (14) + \max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}, 0) \times \sigma((W_{\gamma})_{i-1,j}, (W_{\alpha})_{i,j}) \times (\beta_{i-1/2,j}^{(\alpha,\gamma)})^{+} = 0,$$

$$\frac{\alpha_{i,j}^{n+1}(W_{\alpha})_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}(W_{\alpha})_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon(X_{\alpha}F_{\alpha})_{i+1/2,j} - \varepsilon(X_{\alpha}F_{\alpha})_{i-1/2,j}}{\Delta x_{i}} = \varepsilon\left(F^{\log}\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,j}^{\text{bound}}.$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \\ + \frac{1}{\Delta x_{i}} \times \Lambda_{i,j}^{x} \times \left(\sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j}\right) - \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}\right)\right) = 0, \quad (15)\\ \frac{\alpha_{i,j}^{n+1} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \varepsilon \left(F^{\text{lag}} \frac{\partial X}{\partial x}\right)_{i,j}^{\text{relax}}, \end{cases}$$

где

определяются из (13) и (12) соответственно.

Также может быть представлено решение системы (5). Первый шаг:

$$\frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta y_{j}} \times \left[-\max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j+1}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j+1}\right) \times \left(\beta_{i,j+1/2}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{-} + \right. \\ \left. + \max(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j+1}\right) \times \left(\beta_{i,j+1/2}^{(\gamma,\alpha)}\right)^{-} - \right. \\ \left. - \max(\alpha_{i,j-1} - \alpha_{i,j}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j-1}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j}\right) \times \left(\beta_{i,j-1/2}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{+} + \right.$$

$$\left. + \max(\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j-1}, 0) \times \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j-1}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}\right) \times \left(\beta_{i,j-1/2}^{(\gamma,\alpha)}\right)^{+}\right] = 0,$$

$$\left. \frac{\alpha_{i,j}^{n+1}\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon\left(X_{\alpha}G_{\alpha}\right)_{i,j+1/2} - \varepsilon\left(X_{\alpha}G_{\alpha}\right)_{i,j-1/2}}{\Delta y_{j}} = \varepsilon\left(G^{\log}\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{i,j}^{\text{bound}}\right) \right]$$

где

$$\epsilon \left(X_{\alpha}G_{\alpha}\right)_{i+1/2,j} = = \max\left(\alpha_{i,j} - \alpha_{i,j+1}, 0\right) \times G_{\text{RIM}}\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j+1}\right) \times \left(\beta_{i,j+1/2}^{(\alpha,\gamma)}\right)^{+} + + \min\left(\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j+1}\right) \times G_{\text{RIM}}\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j+1}\right) + + \max\left(\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}, 0\right) \times G_{\text{RIM}}\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j+1}\right) \times \left(\beta_{i,j+1/2}^{(\gamma,\alpha)}\right)^{-};$$

$$(17)$$

 $G_{\text{RIM}}\left(\left(W_{L}\right)_{i,j},\left(W_{R}\right)_{i,j+1}\right)$ — конвективный поток на границе (i, j+1/2) ячейки (i, j) вычисленный с использованием точного римановского солвера [6] для начальных состояний W_{L} слева и W_{R} справа;

— поток Лагранжа для данной топологической реализации двухфазной смеси. Величины, входящие в поток Лагранжа (19), находятся с использованием римановского солвера на фазовом интерфейсе $\left(W_{\alpha}\right)^{*}$ или $\left(W_{\gamma}\right)^{*}$.

Второй шаг:

ſ

$$\begin{vmatrix}
\frac{\alpha_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n}}{\Delta t} + \\
+ \frac{1}{\Delta y_{j}} \times \Lambda_{i,j}^{y} \times \left(\sigma\left(\left(W_{\alpha}\right)_{i,j}, \left(W_{\gamma}\right)_{i,j}\right) - \sigma\left(\left(W_{\gamma}\right)_{i,j}, \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}\right)\right) = 0, \quad (20)\\
\frac{\alpha_{i,j}^{n+1} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n+1} - \alpha_{i,j}^{n} \left(W_{\alpha}\right)_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \varepsilon \left(G^{\log}\frac{\partial X}{\partial y}\right)_{i,j}^{\text{relax}},
\end{cases}$$

где

$$\varepsilon \left(G^{\log} \frac{\partial X}{\partial y} \right)_{i,j}^{\text{relax}} = \Lambda_{i,j}^{y} \times \left(G^{\log} \left(\left(W_{\alpha} \right)_{i,j}, \left(W_{\gamma} \right)_{i,j} \right) - G^{\log} \left(\left(W_{\gamma} \right)_{i,j}, \left(W_{\alpha} \right)_{i,j} \right) \right),$$
(21)

 $\Lambda_{i,j}^y = rac{\epsilon(N_{\rm int})_{i,j}}{\Delta y_j}$ — среднее число внутренних интерфейсов вдоль направ-

ления Y в ячейке (i, j).

В случае больших величин $\Lambda_{i,j}^x$ и $\Lambda_{i,j}^x$, т. е. при перемешивании фаз, решение (15) и (20) эквивалентно введению мгновенной релаксации для скоростей и давлений [11].

Таким образом, для численного решения системы (3) применяется метод расщепления по направлениям (14) и (16), дополненный процедурами релаксации скоростей и давлений.

Важной особенностью метода DEM при двумерных расчетах с использованием расщепления по направлениям является выполнения требования сохранения контактного разрыва [1]. Более детально: однородные профили скоростей и давлений должны сохраняться во времени. Реализация этого принципа приводит к появлению дополнительного соотношения, которое применяется для отдельного расчета изменения тангенциальной кинетической энергии. Это изменение учитывается затем при вычислении давления. Информация об изменении тангенциальной кинетической энергии, вычисленном из дополнительного соотношения, теряется после каждого временного шага [1].

3. Введение второго порядка точности

Второй порядок точности численной схемы по пространству и времени вводится с применением стандартного метода MUSCL (Monotonic Upstream Schemes for Conservative Laws). Для потоковых примитивных переменных каждой из фаз $W = (\alpha, \rho, u, \vartheta, P)^T$ при помощи монотонного ограничителя вычисляются соответствующие наклоны. Значения примитивных переменных слева и справа от i+1/2 границы ячейки вычисляются так:

$$W_{i+1/2,L}^{n} = W_{i}^{n} + \frac{1}{2} \delta W_{i}^{n},$$

$$W_{i+1/2,R}^{n} = W_{i+1}^{n} - \frac{1}{2} \delta W_{i+1}^{n}.$$
(22)

На шаге предиктор системы численно решаются уравнения (14) и (16) на временном шаге $\frac{1}{2}\Delta t$ с использованием (22) для вычисления потоковых величин в (7), (8), (17) и (18). Шаг предиктора заканчивается вычислением значений примитивных переменных на границе ячеек в момент времени $t_{n+1/2}$:

$$W_{i+1/2,L}^{n+1/2} = W_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \delta W_i^{n+1/2},$$

$$W_{i+1/2,R}^{n+1/2} = W_{i+1}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \delta W_{i+1}^{n+1/2}.$$
(23)

На шаге корректор системы (14) и (16) численно решаются уравнения (14) и (16) на временном шаге Δt с использованием (23) для вычисления потоковых величин в (7), (8), (17) и (18).

4. Результаты вычислений

При проведении расчетов двухфазных потоков предполагалось, что каждая из фаз удовлетворяет следующему уравнению состояния:

$$P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma \pi, \tag{24}$$

где γ и π — параметры, зависящие от свойств жидкости или газа.

4.1. Одномерные расчеты

Распад разрыва в додекане. Левая часть метровой трубы ($x < 0,75 \, {\rm m}$) заполнена жидким додеканом при высоком давлении. Правая часть трубы ($x > 0,75 \, {\rm m}$) содержит газообразный додекан при атмосферном давлении. Начальные данные приведены в табл. 1. Результат расчета для второго порядка точности, проведенный с применением описанного в предыдущих частях метода, представлен на рис. 1 для момента времени 473 мкс. Показаны зависимости для давления (a), скорости (b), плотности двухфазной смеси (s) и объемной доли газообразного додекана (z). Вычисления были сделаны на сетке из 1000 ячеек для значения числа Куранта 0,8. Для согласованности численной модели каждая фаза слева или справа содержит крайне малую часть (10^{-8}) другой фазы. Налево через жидкую фазу распространяется волна разрежения, направо движется контактный разрыв, и ударная волна проходит через газовую фазу. На рис. 1 также представлено аналитическое решение. Очевидно хорошее совпадение с расчетными данными.



Рис. 1. Распад разрыва в додекане. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли газовой фазы (*г*)



Рис. 1 (окончание)

| Слева | Справа | |
|-----------------------------------|---|--|
| $\rho_l = 500 \ \kappa r/m^3$ | $\rho_l = 500 \mathrm{kg/m^3}$ | |
| $P_{l} = 10^{8} \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ | |
| $u_l = 0 \text{ M/c}$ | $u_l = 0 \text{ M/c}$ | |
| $\gamma_{l} = 2,19$ | $\gamma_l = 2,19$ | |
| $\pi_{l} = 4 \cdot 10^{8} \Pi a$ | $\pi_l = 4 \cdot 10^8 \Pi a$ | |
| $ ho_g = 2 \kappa \Gamma / M^3$ | $ ho_g = 2 \mathrm{kr} / \mathrm{m}^3$ | |
| $P_g = 10^8 \Pi a$ | $P_{g} = 10^{5} \Pi a$ | |
| $u_g = 0$ м/с | $u_g = 0 \text{ M/c}$ | |
| $\gamma_g = 1,025$ | $\gamma_g = 1,025$ | |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ | |
| $\alpha_g = 10^{-8}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-8}$ | |

Таблица 1. Начальные значения параметров для задачи о распаде разрыва в додекане

Кавитация в воде. В метровой трубе находится вода в жидкой фазе с небольшой примесью водяного пара (10^{-2}). В начальный момент жидкость в левой части трубы (x < 0,5 м) начинает двигаться влево со скоростью 2 м/с, а жидкость в правой части трубы (x > 0,5 м) движется вправо с той же скоростью. Начальные данные приведены в табл. 2.



а

Рис. 2. Кавитация в воде. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли газовой фазы (*г*). Также приведены результаты решения, полученного из баротропной модели [12]



Результат расчета для второго порядка точности, проведенный с применением описанного в предыдущих частях метода, представлен на рис. 2 для момента времени 3,2 мс. Показаны зависимости для давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли газовой фазы (*г*). Влево и вправо распространяются волны разрежения. В центральной части динамически формируется граница раздела фаз, которая изначально отсутствовала. Введение небольшого количеств пара связано с тем, что массообмен, который может происходить при распространении волн разрежения в жидкости, в данном расчете не учитывался. На рис. 2 представлены также результаты расчета, сделанного по баротропной модели [12]. Видно хорошее совпадение результатов обоих расчетов.

| <i>x</i> < 0,5 м | <i>x</i> > 0,5 м |
|--|--------------------------------|
| $\rho_l = 1150 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | $\rho_l = 1150 \text{ kg/m}^3$ |
| $P_{l} = 10^{5} \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ |
| $u_l = -2 \text{ M/c}$ | $u_l = 2$ м/с |
| $\gamma_l = 2,35$ | $\gamma_l = 2,35$ |
| $\pi_l = 1 \cdot 10^9 \Pi a$ | $\pi_l = 1 \cdot 10^9 \Pi a$ |
| $ \rho_g = 1 \mathrm{Kr} / \mathrm{m}^3 $ | $ρ_g = 1 \text{ KG/m}^3$ |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ |
| $u_g = -2 \text{ M/c}$ | $u_g = 2 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_g = 1,43$ | $\gamma_g = 1,43$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $\alpha_g = \overline{10^{-2}}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-2}$ |

Таблица 2. Начальные значения параметров для задачи о кавитации в воде

Волна разрежения в двухкомпонентной трубе. В данном расчете сильная ударная волна распространяется через интерфейсную границу воздуха и воды. В начальный момент в метровой трубе находятся три области с различными состояниями двухфазной смеси. Начальные данные представлены в табл. 3.

| 0 < X < 0,6 м | 0,6 < X < 0,8 м | 0,8 < X < 1 м |
|---|--------------------------------|---|
| $\rho_l = 1000 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | $\rho_l = 1000 \text{kg/m}^3$ | $\rho_l = 1000 \text{кг/m}^3$ |
| $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_l = 10^3 \Pi a$ |
| $u_l = 0$ м/с | $u_l = 0 \text{ M/c}$ | $u_l = 0 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ |
| $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ |
| $ ho_g=50$ кг/м 3 | $ ho_g = 50 \ \mathrm{kg}^3$ | $ ho_g = 0,1 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^3 \Pi a$ |
| $u_g = 0 \text{ M/c}$ | $u_g = 0$ м/с | $u_g = 0 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $\alpha_{g} = 10^{-6}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ |

Таблица 3. Начальные значения параметров для задачи с волной разрежения в двухфазной трубе

При данной конфигурации направо в область с воздухом при низкой плотности распространяется слабая ударная волна, а волна разрежения движется влево, взаимодействуя с интерфейсной границей воды и воздуха с большей плотностью. Результаты расчета второго порядка точности для последовательных моментов времени на сетке из 100 ячеек представлены на рис. 3. Видно отсутствие осцилляций плотности, которые могли бы привести к отрицательным значениям давления [1].


Рис. 3. Волна разрежения в двухкомпонентной воздушной трубе. Профили скорости (*a*), плотности двухфазной смеси (*б*) и давления (*в*) для различных моментов времени

4.2. Двумерные расчеты

Ударная водяная труба с разрывом поперечной скорости. В левой части расчетной области содержится вода при высоком давлении, а в правой водяной пар при атмосферном давлении. Начальные данные представлены в табл. 4. Начальный разрыв располагается при x > 0, 7 м. В начальный момент в левой части расчетной области задается поперечная скорость 1000 м/с, а в правой — 5000 м/с. Решение получено при помощи расщепления системы (14) и (16) вдоль одного направления. При такой постановке задачи, если тангенциальная компонента скорости определяется из уравнения для поперечного импульса, то численный метод быстро приводит к появлению осцилляций и отрицательной величине давления. Именно поэтому тангенциальная скорость находилась из дополнительного уравнения переноса поперечной кинетической энергии, решение которого обеспечивает сохранение однородных профилей давлений и скоростей. На рис. 4 показаны результаты расчета на момент времени 240 мкс для первого и второго порядков точности и сетки из 1000 ячеек. Приведены профили объемной доли водяного пара, давления, а также поперечной и нормальной компонент скорости. Также показано точное решение, согласующееся с результатами расчетов.

| Слева ($x < 0, 7$ м) | Справа ($x > 0, 7$ м) |
|----------------------------------|--|
| $\rho_l = 1000 \text{kg/m}^3$ | $\rho_I = 1000 \ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ |
| $P_l = 10^9 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ |
| $u_l = 0 \text{ m/c}$ | $u_l = 0 \text{ m/c}$ |
| $\vartheta_l = 1000 \text{ м/c}$ | $\vartheta_l = -5000 \text{ m/c}$ |
| $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_I = 4, 4$ |
| $\pi_l = 6 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^8 \Pi a$ |
| $ ho_g = 50 \ m{kg}^3$ | $ ho_g = 50 \mathrm{kr/m^3}$ |
| $P_g = 10^9 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ |
| $u_g = 0 \text{ M/c}$ | $u_g = 0 \text{ M/c}$ |
| $\vartheta_g = 1000 \text{ m/c}$ | |
| $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $\alpha_{g} = 10^{-6}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ |

Таблица 4. Начальные значения параметров для задачи об ударной водяной трубе с разрывом поперечной скорости



Рис. 4. Ударная водяная труба с разрывом поперечной скорости. Профили объемной доли водяного пара (*a*), давления (*б*), нормальной компоненты скорости (*в*) и тангенциальной компоненты скорости (*г*). Также приведено аналитическое решение



Адвекция квадратного пузырька газа в однородном потоке жидкости. Перенос квадратной капли с газом происходит в потоке жидкости при одинаковых скоростях и давлениях обоих компонентов. Расчет для квадратной области 1 м² проводился на сетке 150×150 ячеек. Изначально газовая капля размером 0,2×0,2 м (30×30 ячеек) расположена в левом нижнем углу расчетной области. Ее центр расположен в точке x = 0,3 м, y = 0,3 м. Начальные данные приведены в табл. 5.

| Внутри пузырька с газом | Снаружи газового пузырька |
|---|---|
| $\rho_l = 1000 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | $\rho_1 = 1000 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ |
| $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ |
| $u_l = 1000 \text{ m/c}$ | $u_1 = 1000 \text{ M/c}$ |
| $\vartheta_l = 1000 \text{ m/c}$ | $\vartheta_l = 1000 \text{ m/c}$ |
| $\gamma_1 = 4, 4$ | $\gamma_1 = 4, 4$ |
| $\pi_l = 6 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^8 \Pi a$ |
| $\rho_g = 10 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | $ ho_g = 10$ кг/м ³ |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi \text{a}$ |
| $u_g = 1000 \text{ m/c}$ | $u_g = 1000 \text{ m/c}$ |
| $\vartheta_g = 1000 \text{ м/с}$ | $\vartheta_g = 1000 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ | $\alpha_{g} = 10^{-6}$ |

Таблица 5. Начальные значения параметров для переноса квадратного пузырька газа в однородном потоке жидкости

Результаты расчета после 300 шагов по времени для значения числа Куранта 0,8 и второго порядка точности представлены на рис. 5 для контуров парциальной плотности газа ($\alpha_g \rho_g$). Явно видна численная диффузия интерфейсной границы раздела газа и жидкости, однако общая форма газовой капли сохраняется.



Рис. 5. Контуры парциальной плотности газа для адвекции квадратной капли газа

Одномерные срезы профилей плотности двухфазной смеси (a), объемной доли газа (b) и компонент скоростей (a, c) для конечного момента времени показаны на рис. 6. Следует отметить также отсутствие вариаций скоростей и давления.



а

Рис. 6. Одномерные срезы профилей плотности двухфазной смеси (*a*), объемной доли газа (*б*) и компонент скоростей (*в*, *г*) для адвекции квадратной капли газа



Рис. 6 (окончание)

Взаимодействие ударной волны с круглым газовым пузырьком. В данной задаче ударная волна, распространяясь в жидкости, достигает круглого газового пузырька и взаимодействует с ним. Расчетная область представляет собой прямоугольник размером $2 \times 1 \text{ м}^2$. Круглый газовый пузырек имеет радиус 0,2 м с центром, расположенным в точке x = 0,5 м, y = 0,5 м. Ударная волна моделируется как мгновенный толчок со скоростью 300 м/с. Для этого слева вводится дополнительная расчетная область жидкости с начальной компонентой скорости 300 м/с. На верхней и нижней границах расчетной области установлены граничные условия полного отражения. Слева и справа установлены в табл. 6.

| -0,25 < X < 0 м | Внутри газового | Снаружи газового | |
|--|--|---|--|
| | пузырька | пузырька | |
| $\rho_l = 1000 \text{ кг/м}^3$ | $\rho_l = 1000 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | $\rho_l = 1000 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ | |
| $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ | |
| $u_l = 300 \text{ M/c}$ | $u_l = 0$ м/с | $u_l = 0 \text{ M/c}$ | |
| $\vartheta_l = 0$ м/с | $ \Theta_l = 0 \mathrm{м/c} $ | $\Theta_l = 0$ м/с | |
| $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ | |
| $\pi_l = 1 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 1 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 1 \cdot 10^8 \Pi a$ | |
| $ \rho_g = 1 \mathrm{Kr} / \mathrm{M}^3 $ | $ \rho_g = 1 \mathrm{KF} / \mathrm{M}^3 $ | $ ho_g = 1 \mathrm{KF} / \mathrm{M}^3$ | |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ | |
| $u_g = 300 \text{ M/c}$ | $u_g = 0 \text{ M/c}$ | $u_g = 0$ м/с | |
| $\vartheta_g = 0$ м/с | $\vartheta_g = 0$ м/с | $\vartheta_g = 0$ м/с | |
| $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ | |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ | |
| $\alpha_{g} = 10^{-6}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ | $\alpha_g = 10^{-6}$ | |

Таблица 6. Начальные значения параметров для задачи о взаимодействии ударной волны с круглым газовым пузырьком

Результаты расчета для значения числа Куранта 0,8 для профиля парциальной плотности газа приведены на рис. 7. Видны сильная деформация струи потока и образование вихревой пары.



Рис. 7. Контуры парциальной плотности газа для задачи о взаимодействии ударной волны с круглым газовым пузырьком

Взаимодействие ударной волны с газовыми пузырьками. Данный расчет аналогичен предыдущему, но взаимодействие ударной волны происходит не с одним, а с несколькими круглыми пузырьками. Расчетная область представляет собой заполненный жидкостью прямоугольник размером 4×2 м², в котором располагаются 28 круглых газовых пузырьков с радиусом 0,15 м. Ударная волна моделируется аналогично предыдущей задаче. Начальные данные приведены в табл. 7.

| −0, 25 < X < 0 м | Внутри газовых | Снаружи газовых |
|-------------------------------|-------------------------------|--|
| $ρ_i = 1000 \text{ kg/m}^3$ | $ρ_i = 1000 \text{ kg/m}^3$ | $ρ_1 = 1000 \text{кг/m}^3$ |
| $P_{l} = 10^{5} \Pi a$ | $P_1 = 10^5 \Pi a$ | $P_{l} = 10^{5} \Pi a$ |
| $u_l = 300 \text{ M/c}$ | $u_l = 0 \text{ M/c}$ | $u_l = 0 \text{ M/c}$ |
| $\vartheta_l = 0 \text{ M/c}$ | $\vartheta_l = 0$ м/с | $\vartheta_l = 0 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ | $\gamma_l = 4, 4$ |
| $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ | $\pi_l = 6 \cdot 10^6 \Pi a$ |
| $\rho_g = 50 \mathrm{kg}^3$ | $ ho_g = 50 \ \mathrm{kg}^3$ | $ ho_g = 50 \mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$ |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ |
| $u_g = 300 \text{ m/c}$ | $u_g = 0 \text{ M/c}$ | $u_g = 0 \text{ M/c}$ |
| | $\vartheta_g = 0$ м/с | $\vartheta_g = 0$ м/с |
| $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ | $\gamma_g = 1, 4$ |

Таблица 7. Начальные значения параметров для задачи о взаимодействии ударной волны с газовыми пузырьками

| | | Табл. 7 (окончание, |
|------------------------|--------------------------|------------------------|
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $\alpha_{g} = 10^{-6}$ | $\alpha_g = 1 - 10^{-6}$ | $\alpha_{g} = 10^{-6}$ |

Результаты расчета для контура парциальной плотности газа и для трех последовательных моментов времени представлены на рис. 8. Этот расчет демонстрирует способность метода моделировать распространение ударных волн в двухфазной среде с большим числом разрывов в профиле плотности.



Рис. 8. Контуры парциальной плотности газа для задачи о взаимодействии ударной волны с газовыми пузырьками

5. Заключение

В данной работе для двумерных расчетов двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых течений применялся модифицированный метод дискретных уравнений [5] с использованием точного римановского солвера и процедуры расщепления по направлениям. Были выполнены следующие двумерные расчеты: распад разрыва в ударной водяной трубе в присутствии резкого градиента поперечной скорости, адвекция квадратного пузырька газа в однородном потоке жидкости, взаимодействие ударной волны с одним круглым газовым пузырьком и с множеством газовых пузырьков. Полученные результаты показывают хорошее согласие с аналитическими решениями. Метод может быть легко модифицирован для проведения трехмерных расчетов с использованием той же процедуры расщепления по направлениям.

Литература

- 1. Saurel R., Abgrall R. A simple method for compressible multifluid flows // SIAM J. Sci. Comput. — 1999. — Vol. 21, № 3. — P. 1115—1145.
- Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150. — P. 425—467.
- Adrianov N., Saurel R., Warnecke G. A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2003. — Vol. 41. — P. 109—131.
- Леонов А. А., Чуданов В. В. Численные схемы решения систем гиперболического типа для моделирования ударно-волновых процессов в двухфазных средах // Труды ИБРАЭ РАН. — Вып. 4: Численные схемы решения систем гиперболического типа для моделирования ударно-волновых процессов в двухфазных средах. — М.: Наука, 2008.
- Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. — 2003. — Vol. 186. — P. 361—396.
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
- Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi conservative approach // J. Comput. Phys. — 1996. — Vol. 125. — P. 150—160.

- Leonov A., Chudanov V. A discrete equation method for two-dimensional calculations of two-phase compressible mixtures // Proc. ICONE 17, Brussels, Belgia, 2009. — [S. 1.], 2009.
- Drew D., Passman S. Theory of Multicomponent Fluids. [S. 1.]: Springer, 1998.
- Saurel R., Gavrilyuk S., Renaud F. A multiphase model with internal degrees of freedom: application to shock-bubble interaction // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 495. P. 283—321.
- Saurel R., LeMetayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation // J. Fluid. Mech. — 2001. — Vol. 431. — P. 239—271.
- Saurel R., Petitpas F., Berry R. A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // J. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 228. — P. 1678—1712.
- Quirk J. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flow around arbitrary complex two dimensional bodies // Comput.&Fluids. — 1994. — Vol. 23. — P. 125—142.

Моделирование взрывного испарения с применением реактивного римановского солвера

1. Введение

При распространении сильных волн разрежения через термодинамически равновесную жидкость последняя может перейти в метастабильное состояние. Ее температура может превысить температуру насыщения при уменьшенном вследствие прохождения волны разрежения давлении. Такая перегретая жидкость изменяет свое фазовое состояние очень быстро, взрывообразно. В результате может образовываться либо чистый пар, либо смесь жидкости и пара в термодинамическом равновесии, движущиеся с большой скоростью. Это явление называется кавитацией. Кавитация часто происходит при обтекании сверхзвуковых снарядов и аэродинамических поверхностей или на внутренних соплах в инжекторных двигателях. Это явление приводит к сильным и резким возмущениям в гидродинамических системах. В большинстве случаев благодаря геометрическим эффектам кавитация является двумерным или трехмерным процессом, что сильно затрудняет ее экспериментальное и теоретическое изучение.

На рис. 1 показана упрощенная схема экспериментальной установки для изучения кавитации. Она представляет собой горизонтальную трубу, заполненную жидкостью в термодинамическом равновесии при атмосферном или большем давлении. Эта труба соединяется с камерой очень низкого давления. После разрыва мембраны между трубой жидкости и камерой с вакуумом волны разрежения распространяются через жидкость, переводя ее в перегретое состояние. Затем в перегретой жидкости формируется дозвуковой фронт, который распространяется через перегретую жидкость, вызывая образование смеси «жидкость — пар» в термодинамическом равновесии. Эта смесь движется с высокой скоростью в сторону камеры с низким давлением. Скорость фронта испарения составляет величину около 1 м/с, а скорость образованной смеси — приблизительно 100 м/с.



Рис. 1. Упрощенная схема экспериментальной установки для изучения кавитации [1] и распространения возникающих волн

Экспериментальное исследование фронта испарения [2] показывает, что он имеет возмущенную ячеистую разрывную структуру (рис. 2). Характерный размер фронта составляет 1 мм — 1 мкм. Эта величина крайне мала по сравнению с размерами большинства индустриальных систем. Толщина граничного теплового слоя с обеих сторон фронта также очень мала примерно 1мкм. Проведенные численные исследования структуры фронта испарения [3] позволяют при моделировании кавитации рассматривать фронт как разрыв без анализа его внутренней структуры.



Рис. 2. Экспериментальные фотографии, показывающие струткуру фронта испарения [7]

В таком предположении при моделировании должны быть решены следующие задачи:

- выбор подходящего уравнения состояния и термодинамическое замыкание модели;
- выбор кинетического соотношения на фронте испарения;
- построение реактивного римановского солвера;
- численное моделирование многомерного распространения фронта испарения.

При рассмотрении первой задачи подходящее уравнение состояние необходимо для замыкания законов сохранения с обеих сторон фронта испарения. Так как фронт разделяет жидкость и чистый пар в случае полного испарения или жидкость и смесь «жидкость — пар» в случае частичного испарения, то в первом случае используются уравнения состояния чистой жидкости и чистого пара, а во втором — уравнение состояния чистой жидкости и гомогенное уравнение состояния смеси «жидкость — пар» в термодинамическом равновесии. Уравнения состояния чистого пара и жидкости сильно зависимы в термодинамическом равновесии. Комбинация этих уравнений совместно с условиями равенства давлений, температур и химического потенциала должна воспроизводить фазовую диаграмму или кривую давления насыщенного пара в зависимости от температуры $P = P_{\rm SAT}(T)$.

Вторая и третья задачи связаны с моделированием самого процесса испарения. Как видно из рис. 1, акустическая волна всегда предшествует фронту испарения, который, в свою очередь, предшествует контактному разрыву и ударной волне (рис. 3). Такая конфигурация называется в литературе реактивным римановским солвером. Численные решения этой задачи были получены при расчетах детонации и дефлаграции (горения) для уравнений состояния идеального газа [4; 5]. В случае моделирования процесса испарения решение будет иметь более сложный вид.

Так как фронт испарения рассматривается как разрыв, а среды по обеим сторонам разрыва описываются уравнениями Эйлера, то для значений термодинамических параметров с обеих сторон фронта справедливы соотношения Рэнкина—Гюгонио, выражающие сохранение массы, импульса и энергии. Для разрешения неопределенности, которая возникает при прохождении первой акустической волны, требуется дополнительное кинетическое соотношение. Оно определяет скорость фронта испарения и обеспечивает единственность решения реактивного римановского солвера.



Рис. 3. Волновая структура для распада разрыва с образованием фронта испарения

Процесс испарения сильно перегретой жидкости носит взрывообразный характер, поэтому в качестве дополнительного кинетического соотношения используется условие, связанное с максимально возможной скоростью перетекания массы через фронт испарения. Это условие называется точкой дефлаграции Чэпмена—Жуге (CJ). Расчеты фронтов испарения и дефлаграции в данном подходе идентичны в смысле принадлежности обоих фронтов к одной и той же ветке кривой Круссарда. В [1] было произведено сравнение экспериментальных данных для додекана, полученных на установке, схема которой приведена на рис. 1, с результатами расчета с использованием соотношений Рэнкина—Гюгонио и замыкающего кинетического соотношения СJ. Хорошее согласие экспериментальных результатов с теоретическими кривыми также является основанием для выбора данного кинетического соотношения.

Многомерность при распространении фронта испарения учитывается при использовании подхода, принятого в методологии Discrete Equation Method (DEM) [6]. В этом подходе осуществляется интегрирование интерфейсных задач Римана по двухфазному контрольному объему. Первоначально метод DEM был разработан для решения двухфазных интерфейсных задач. Для учета процессов взрывного испарения этот метод необходимо адаптировать — Reactive Discrete Equation Method (RDEM) [7].

Далее изложение материала осуществляется следующим образом. Сначала представлены уравнения состояния пара и жидкости, которые при условии термодинамического равновесия должны воспроизводить фазовую диаграмму «жидкость — пар» (раздел 2). Во разделе 3 представлено решение задачи Римана с учетом образования фронта испарения, или так называемый реактивный римановский солвер. Раздел 4 посвящен методу DEM, адаптированному для использования реактивного римановского солвера. В разделе 5 представлены результаты расчета одномерных задач с использованием метода RDEM.

2. Уравнения состояния фаз в двухфазной смеси

Образующийся в перегретой жидкости фронт испарения разделяет двухфазную смесь жидкости и газа в термодинамическом равновесии и чистую жидкую фазу. Уравнения состояния каждой из фаз в двухфазной смеси при условии термодинамического равновесия должны воспроизводить фазовую диаграмму «жидкость — пар». Поэтому различные параметры обоих уравнений состояния являются взаимозависимыми [8].

Для проведения расчетов было выбрано уравнение состояния следующего вида [9]:

$$e(P,\rho) = \frac{P+\gamma\pi}{(\gamma-1)\rho}C_{\nu}T + q,$$
(1)

или

$$\rho(P,\rho) = \frac{P+\pi}{(\gamma-1)C_{\nu}T},$$
(2)

где e — внутренняя энергия единицы массы; P — давление; ρ — плотность; T — температура; C_{ν} — теплоемкость при постоянном объеме; γ , π — константы, характеризующие свойства вещества; q — энергия фазы в заданном состоянии.

Чтобы получить аналитический вид кривой насыщения, нужно сделать предположение о равенстве давлений, температур и функций Гиббса каждой из фаз. Функция Гиббса для данной фазы с уравнением состояния (1) имеет вид

$$G(P,T) = \left(\gamma C_{\nu} - q'\right)T - C_{\nu}T \times \ln \frac{T^{\gamma}}{\left(P + \pi\right)^{\gamma-1}}C_{\nu}T + q,$$
(3)

где q' — характеристическая константа.

Приравнивая функции Гиббса для каждой из фаз, можно получить зависимость давления насыщения двухфазной смеси от температуры P(T):

$$\ln\left(P+\pi_g\right) = A + \frac{B}{T} + C\ln T + D\ln\left(P+\pi_I\right),\tag{4}$$

где

$$A = \frac{\gamma_l \times (C_v)_l - \gamma_g \times (C_v)_g + q'_g - q'_l}{(\gamma_g - 1) \times (C_v)_g}$$
$$B = \frac{q_l - q_q}{(\gamma_g - 1) \times (C_v)_g};$$
$$C = \frac{\gamma_g \times (C_v)_g - \gamma_l \times (C_v)_l}{(\gamma_g - 1) \times (C_v)_g};$$
$$D = \frac{(\gamma_l - 1) \times (C_v)_l}{(\gamma_g - 1) \times (C_v)_g}.$$

Индекс « g » обозначает параметры газовой фазы, индекс « l » — параметры жидкой фазы.

Фитируя ¹ зависимость (4) и экспериментальную кривую испарения, можно определить значения параметров для уравнения состояния (1) [8]. Для додекана рассчитанные таким образом параметры составят [7]:

 $\gamma_l = 2,19$; $\pi_l = 4 \times 10^8$ Па; $q_l = -755 \cdot 10^3$ Дж/кг; $q'_l = 0$ Дж/кг/К; (C_v)_l = 1077 Дж/кг/К; $\gamma_g = 1,025$; $\pi_g = 0$ Па; $q_g = -237 \cdot 10^3$ Дж/кг; $q'_g = -21926$ Дж/кг/К; (C_v)_g = 1956 Дж/кг/К.

3. Реактивный римановский солвер

При решении задачи Римана с учетом образования фронта испарения необходимо использовать уравнение состояния для двухфазной смеси, так как фронт испарения разделяет чистую жидкую фазу и смесь жидкости и

¹ Синоним для «фитированный» — «подогнанный».

газа в термодинамическом равновесии. Уравнение состояния перегретой жидкости до фронта испарения имеет вид

$$e_{0}(P_{0},\rho_{0}) = \frac{P_{0} + \gamma_{I}\pi_{I}}{(\gamma_{I} - 1)\rho_{0}} + q_{I}.$$
(5)

Уравнения состояния каждой из фаз смеси «жидкость — газ» в термодинамическом равновесии записываются в следующем виде:

$$e_g(P,\rho_g) = \frac{P + \gamma_g \pi_g}{(\gamma_g - 1)\rho_g} + q_g, \qquad (6)$$

$$e_l(P,\rho_l) = \frac{P + \gamma_l \pi_l}{(\gamma_l - 1)\rho_l} + q_l.$$
⁽⁷⁾

Уравнения (6) и (7) дополняются соотношением (4), выражающим зависимость T(P) для кривой насыщения.

Газодинамические параметры двухфазной смеси и чистой жидкости по обеим сторонам фронта испарения связаны соотношениями Рэнкина— Гюгонио, выражающими сохранение массы, импульса и энергии:

$$u = u_{0} + m \times \left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$P = P_{0} + m^{2} \times \left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$e = e_{0} + \frac{P + P_{0}}{2} \times \left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho}\right),$$
(8)

где $m = \rho_0 \times (\sigma - u_0)$ — скорость поток массы через фронт испарения; σ — скорость фронта испарения; u_0 — скорость перегретой жидкости; u — скорость двухфазной смеси за фронтом испарения; $\rho = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l$ — плотность двухфазной смеси; α_g — объемная доля газа в двухфазной смеси; α_l — объемная доля жидкости в двухфазной смеси; $\alpha_g + \alpha_l = 1$; e — внутренняя энергия двухфазной смеси, $\rho e = (\alpha \rho e)_g + (\alpha \rho e)_l$.

Выражения для плотности и внутренней энергии двухфазной смеси с учетом соотношения (4) можно переписать в следующем виде:

$$\rho = \alpha_{g} \rho_{g} + (1 - \alpha_{g}) \rho_{l} = \rho_{l} + \alpha_{g} \left(\rho_{g} - \rho_{l} \right) = \rho \left(P, \alpha_{g} \right),$$

$$e = \frac{1}{\rho} \left[\rho_{l} e_{l} + \alpha_{g} \left(\rho_{g} e_{g} - \rho_{l} e_{l} \right) \right] = e \left(\rho, P, \alpha_{g} \right).$$
(9)

Выражая объемную долю из первого соотношения (9), можно получить уравнение состояния двухфазной смеси:

$$e(\rho, P) = \frac{1}{\rho} \left[\rho_l e_l + \frac{\rho - \rho_l}{\rho_g - \rho_l} \left(\rho_g e_g - \rho_l e_l \right) \right].$$
(10)

Объемная доля газа в двухфазной смеси определяется из комбинации соотношений (9) и третьего выражения (8):

$$\alpha_{g}(P) = \left(e_{0} - e_{l} + \frac{P + P_{0}}{2}\left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho}\right)\right) / \left(e_{0} - e_{l} + \frac{P + P_{0}}{2}\left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho}\right) - \frac{\rho_{g}}{\rho_{l}}\left(e_{0} - e_{g} + \frac{P + P_{0}}{2}\left(\frac{1}{\rho_{0}} - \frac{1}{\rho_{g}}\right)\right)\right).$$
(11)

Кривая зависимости плотности двухфазной смеси от давления

$$\rho = \rho_l + \alpha_g \left(P \right) \times \left(\rho_g - \rho_l \right)$$
(12)

соответствует кривой Круссарда для двухфазной смеси (рис. 4). Эта кривая описывает зависимость давления от плотности двухфазной смеси только в области насыщения. Часть кривой при низком давлении ($P < P_0^*$) называется кривой дефлаграции, другая часть — кривой детонации. На кривой Круссарда существуют две особенные точки, в которых эта кривая имеет общие касательные с линией Релея, — см. второе соотношение (8). Тангенциальная точка при более высокой величине давления называется СЈ-точкой детонации, при более низкой величине давления ($P < P_0^*$) — СЈ точкой дефлаграции. Процесс испарения связан с дефлаграцией, т. е. понижением давления. В этом случае СЈ-точка дефлаграции соответствует максимальному потоку массы через фронт испарения.



Для нахождения величины давления в CJ точке дефлаграции используется условие [7]

$$\frac{dm^2}{dP} = 0. \tag{13}$$

Из второго соотношения (8) следует:

$$m^{2}(P) = \frac{P - P_{0}^{*}}{\frac{1}{\rho_{0}^{*}} - \frac{1}{\rho(P)}},$$
(14)

где $\rho(P)$ определяется из (12).

Дифференцируя (14), можно получить

$$\frac{dm^2}{dP} = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho_0^*}{\rho(P)} \frac{d\rho(P)}{dP} - \frac{\rho(P) - \rho_0^*}{P - P_0^*} = 0.$$
(15).

Уравнение (15) используется для определения величины давления двухфазной смеси в СЈ-точке дефлаграции. При вычислении производной $\frac{d\rho(P)}{dP}$ последовательно находятся производные от переменных $e_{_g}(P)$,

 $e_l(P)$, $\rho_g(P)$, $\rho_l(P)$ в соотношениях (11) и (12).

Волновая структура, которая реализуется при решении задачи Римана, в случае образования фронта испарения имеет вид, показанный на рис. 5. Критерием образования фронта испарения является условие «перегретости» жидкой фазы. Сначала определяется величина давления P^* при решении стандартной или «инертной» задачи Римана, из уравнения состояния вычисляется температура жидкой фазы T^* . Затем из соотношения (4) находится значение давления насыщения $P_{\text{HAC}}(T^*)$. Если $P^* > P_{\text{HAC}}(T^*)$, то жидкость не является перегретой, и образования фронта испарения не происходит. В этом случае решение задачи Римана определяется с использованием стандартного или «инертного» римановского солвера [10]. Если $P^* < P_{\text{HAC}}(T^*)$, то жидкость перегрета, и нужно решать задачу Римана с учетом образования фронта испарения.

Фронт испарения, разделяющий область с перегретой жидкостью (0^{*}) и область с двухфазной смесью (^{*}), имеет дозвуковую скорость. Поэтому сначала через область перегретой жидкости всегда проходит волнапредвестник, разделяющая перегретую жидкость (0^{*}) и жидкость в начальном состоянии (0). Если $P_0^* \ge P_0$, то предвестник — ударная волна, если $P_0^* < P_0$, то волна разрежения.

Как и в случае стандартного римановского солвера, величина давления P^* находится с использованием итерационной процедуры. Слева и справа от контактного разрыва, движущегося со скоростью u^* , определяются однопараметрические функции $\Phi_L(P^*)$ и $\Phi_R(P^*)$. Далее итерационным методом решается уравнение

$$F(P^*) = u_{\rm R} - u_{\rm L} + \Phi_{\rm R}(P^*) + \Phi_{\rm L}(P^*) = 0,$$
(16)

где $u_{\rm R}$ и $u_{\rm L}$ — начальные скорости справа и слева от разрыва.



Рис. 5. Волновая структура римановского солвера

В случае, изображенном на рис. 5, однопараметрическая функция давления будет иметь вид

$$\Phi_0(P^*) = u_0^* - u_0 + \frac{P^* - P_0^*}{m_{\rm CI}(P^*)},\tag{17}$$

где $m_{\rm CJ}(P^*)$ — скорость потока массы через фронт испарения, разделяющий область с перегретой жидкостью и область с двухфазной смесью, в CJ-точке дефлаграции. То есть параметры перегретой жидкости (P_0^*, ρ_0^*) в процессе итераций должны обеспечивать сходимость давления P^* к давлению двухфазной смеси в CJ-точке дефлаграции.

При каждом фиксированном значении P^* величина давления P_0^* определяется следующим итерационным способом. Для каждого значения P_0^* в процессе итерации находится плотность перегретой жидкости ρ_0^* :

$$\rho_{0}^{*} = \begin{cases} \rho_{0} \times \frac{\left(\gamma_{0}+1\right) \frac{P_{0}^{*}+\pi_{0}}{P_{0}+\pi_{0}}+\gamma_{0}-1}{\left(\gamma_{0}-1\right) \frac{P_{0}^{*}+\pi_{0}}{P_{0}+\pi_{0}}+\gamma_{0}+1}, \text{ если } P_{0}^{*} \ge P_{0}, \\ \rho_{0} \times \left(\frac{P_{0}^{*}+\pi_{0}}{P_{0}+\pi_{0}}\right)^{\frac{1}{\gamma_{0}}}, \text{ если } P_{0}^{*} < P_{0}. \end{cases}$$

$$(18)$$

Далее для найденных значений (P_0^*, ρ_0^*) определяется величина давления двухфазной смеси P_{CJ}^* в СЈ-точке дефлаграции из условия (15). Затем находится новое значение P_0^* :

$$P_0^* = P^* - m_{CJ}^2 \left(P_{CJ}^2 \right) \times \left(\frac{1}{\rho_0^*} - \frac{1}{\rho^*} \right) = P^* - P_{CJ}^* + P_0^*.$$
(19)

Процесс повторяется снова, и сходимость величины P_0^* достигается через четыре-пять итераций. На следующем шаге вычисляется однопараметрическая функция (17) для правой от контактного разрыва области на рис. 5. Аналогично или с использованием инертного римановского солвера вычисляется однопараметрическая функция для левой от контактного разрыва области, и выполняется итерация (16) для нахождения нового значения P^* . По известной величине давления P^* можно определить все остальные газодинамические параметры в каждой области волновой конфигурации на рис. 5.

4. Адаптация метода DEM для использования реактивного римановского солвера

Для вывода системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение двухфазной или двухкомпонентной смеси, обычно применяются процедуры математического усреднения [11] или принцип Гамильтона [12]. В обоих случаях возникает необходимость численной аппроксимации средних интерфейсных значений неконсервативных членов уравнения. Выбор того или иного способа численной аппроксимации не является однозначным.

В методе DEM каждая фаза в смеси описывается собственными уравнениями, и локальные интерфейсные величины определяются для каждой возможной топологической реализации с использованием обычного римановского солвера. Средние интерфейсные величины находятся при помощи усреднения по всем топологическим реализациям. Усредненные таким образом интерфейсные величины представляют собой дискретные выражения, которые в составе уравнений для каждого из компонент смеси формируют численную схему. В полученной схеме нет свободных параметров, связанных с аппроксимацией интерфейсных членов.

В присутствии сильного испарения в двухфазной среде для сохранения преимуществ метода DEM в численную схему необходимо интегрировать реактивный римановский солвер, описывающий возникающую волновую структуру включая фронт испарения. Это приведет к появлению новых членов в уравнениях (реактивных потоков) и к модификации уже имеющихся членов (потоки Эйлера и Лагранжа). Далее для простоты рассматривается одномерный случай. Для двумерных расчетов можно использовать пространственное расщепление и применять разработанный одномерный метод.

Каждая фаза в смеси удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \tag{20}$$

где

$$U = \begin{bmatrix} 1, \rho, \rho u, \rho E \end{bmatrix}^T;$$
 (21)

$$F = \begin{bmatrix} 0, \rho u, \rho u^2 + P, (\rho E + P)u \end{bmatrix}^T.$$
 (22)

Вводя фазовую функцию

 $\chi_k(M, t) = \begin{cases} 1, \text{ если точка M расположена в фазе } k, k = g, l, \\ 0 в иных случаях, \end{cases}$

удовлетворяющую уравнению переноса

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} + \sigma_{\text{contact}} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \sigma_{\text{react}} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0,$$
(23)

где σ_{contact} — локальная интерфейсная скорость контактного разрыва; σ_{react} — локальная интерфейсная скорость фронта испарения (см. рис. 5), можно получить:

$$\frac{\partial \chi_k U}{\partial t} + \frac{\partial \chi_k F}{\partial x} = F^{\text{lag}} \frac{\partial \chi_k}{\partial x} + F^{\text{react}} \frac{\partial \chi_k}{\partial x}, \qquad (24)$$

где поток Лагранжа

$$F^{\text{lag}} = F - \sigma_{\text{contact}} U = \begin{bmatrix} -u, 0, P, Pu \end{bmatrix}^T, \ (\sigma_{\text{contact}} = u)$$
(25)

реактивный поток

$$F^{react} = F - \sigma_{react} U =$$

$$= \left[-\sigma_{react}, \rho \times (u - \sigma_{react}), \rho \times (u - \sigma_{react}) \times u + \right.$$

$$\left. + P, \rho \times (u - \sigma_{react}) \times E + Pu \right]^{T}.$$
(26)

Усреднение уравнений (24) по всем возможным топологическим реализациям осуществляется при помощи интегрирования по времени (Δt) и пространству (Δx_i) в каждой ячейке расчетной сетки. Усреднение полученного результат умножением на $\frac{1}{\Delta x_i \Delta t}$ окончательно дает следующее соотношение [7]:

$$\frac{\left(\alpha_{k}U_{k}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{k}U_{k}\right)_{i}^{n}}{\Delta t}+\frac{\left(\overline{\chi_{k}F}\right)_{i+1/2}-\left(\overline{\chi_{k}F}\right)_{i-1/2}}{\Delta x_{i}}=$$

$$=\frac{\left(\overline{F^{\text{lag}}\left[\chi_{k}\right]}\right)_{i-1/2}+\left(\overline{F^{\text{lag}}\left[\chi_{k}\right]}\right)_{i+1/2}}{\Delta x_{i}}+$$

$$+\frac{\left(\overline{F^{\text{react}}\left[\chi_{k}\right]}\right)_{i-1/2}+\left(\overline{F^{\text{react}}\left[\chi_{k}\right]}\right)_{i+1/2}}{\Delta x_{i}}, (k=1,2),$$
(27)

где $(\alpha_k)_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \chi_k dx$ — объемная доля фазы k в i-й ячейке;

 $(U_k)_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U_k dx$ — вектор средних значений консервативных пере-

менных фазы k в i -й ячейке;

$$\left(\overline{\chi_{l}F} \right)_{i \pm 1/2} = \min \left(\left(\alpha_{l} \right)_{i-1}, \left(\alpha_{l} \right)_{i} \right) \times \left(\chi_{l}^{*}F^{*} \right)_{i \pm 1/2}^{l,l} + \\ + \max \left(0, \left(\alpha_{l} \right)_{i-1} - \left(\alpha_{l} \right)_{i} \right) \times \left(\chi_{l}^{*}F^{*} \right)_{i \pm 1/2}^{g,l} + \\ + \max \left(0, \left(\alpha_{l} \right)_{i} - \left(\alpha_{l} \right)_{i-1} \right) \times \left(\chi_{l}^{*}F^{*} \right)_{i \pm 1/2}^{l,g} + \\ \end{array}$$

— средний поток Эйлера на границах *i*-й ячейки для жидкой фазы;

F^{*} — поток Эйлера (22) на границе *i*-й ячейки для данной топологической реализации, который определяется из решения задачи Римана;

 χ_l^* — фазовый коэффициент для потока Эйлера жидкой фазы, величина которого зависит от условия образования фронта испарения и от топологии реализации (табл. 1);

$$\left(\overline{\chi_g F} \right)_{i \pm 1/2} = \min \left(\left(\alpha_g \right)_{i-1}, \left(\alpha_g \right)_i \right) \times \left(F^* \right)_{i \pm 1/2}^{g,g} + \\ + \max \left(0, \left(\alpha_l \right)_{i-1} - \left(\alpha_l \right)_i \right) \times \left(\chi_g^* F^* \right)_{i \pm 1/2}^{g,l} + \\ + \max \left(0, \left(\alpha_l \right)_i - \left(\alpha_l \right)_{i-1} \right) \times \left(F^* \right)_{i \pm 1/2}^{l,g}$$

— средний поток Эйлера на границах *i*-й ячейки для газовой фазы;

 $\chi^*_{
m g}$ — фазовый коэффициент для потока Эйлера газовой фазы;

$$\begin{split} \left(\overline{F^{\log}\left[\chi_{l}\right]}\right)_{i\pm1/2} &= \min\left(\left(\alpha_{l}\right)_{i-1},\left(\alpha_{l}\right)_{i}\right) \times \left(\chi_{l}^{\log}F^{\log}\right)_{i\pm1/2}^{l,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{i-1} - \left(\alpha_{l}\right)_{i}\right) \times \left(\chi_{l}^{\log}F^{\log}\right)_{i\pm1/2}^{g,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{i} - \left(\alpha_{l}\right)_{i-1}\right) \times \left(\chi_{l}^{\log}F^{\log}\right)_{i\pm1/2}^{l,g} \end{split}$$

— средний поток Лагранжа на границах *i*-й ячейки для жидкой фазы;

F^{lag} — поток Лагранжа (25) на границе *i*-й ячейки для данной топологической реализации, который определяется из решения задачи Римана;

 χ_l^{lag} — фазовый коэффициент для потока Лагранжа жидкой фазы, величина которого зависит от условия образования фронта испарения и от топологии реализации (табл. 2);

$$\begin{split} \left(\overline{F^{\log}\left[\chi_{g}\right]}\right)_{i\pm1/2} &= \min\left(\left(\alpha_{l}\right)_{l-1},\left(\alpha_{l}\right)_{l}\right) \times \left(\chi_{g}^{\log}F^{\log}\right)_{l\pm1/2}^{l,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{l-1}-\left(\alpha_{l}\right)_{l}\right) \times \left(\chi_{g}^{\log}F^{\log}\right)_{l\pm1/2}^{g,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{l}-\left(\alpha_{l}\right)_{l-1}\right) \times \left(\chi_{g}^{\log}F^{\log}\right)_{l\pm1/2}^{l,g} + \\ \end{split}$$

средний поток Лагранжа на границах *i*-й ячейки для газовой фазы;

 ^{lag}

 фазовый коэффициент для потока Лагранжа газовой фазы;

$$\begin{split} \left(\overline{F^{\text{react}}\left[\chi_{l}\right]}\right)_{i\pm 1/2} &= \min\left(\left(\alpha_{l}\right)_{i-1},\left(\alpha_{l}\right)_{i}\right) \times \left(\chi_{l}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm 1/2}^{l,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{i-1}-\left(\alpha_{l}\right)_{i}\right) \times \left(\chi_{l}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm 1/2}^{g,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{i}-\left(\alpha_{l}\right)_{i-1}\right) \times \left(\chi_{l}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm 1/2}^{l,g} + \\ \end{split}$$

— средний реактивный поток на границах *i*-й ячейки для жидкой фазы;

 F^{react} — реактивный поток (26) на границе *i*-й ячейки для данной топологической реализации, который определяется из решения задачи Римана; χ_l^{react} — фазовый коэффициент для реактивного потока жидкой фазы, величина которого зависит от условия образования фронта испарения и от топологии реализации (табл. 3);

$$\begin{split} \left(\overline{F^{\text{react}}\left[\chi_{g}\right]}\right)_{i\pm1/2} &= \min\left(\left(\alpha_{l}\right)_{l-1},\left(\alpha_{l}\right)_{l}\right) \times \left(\chi_{g}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm1/2}^{l,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{l-1} - \left(\alpha_{l}\right)_{l}\right) \times \left(\chi_{g}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm1/2}^{g,l} + \\ &+ \max\left(0,\left(\alpha_{l}\right)_{i} - \left(\alpha_{l}\right)_{l-1}\right) \times \left(\chi_{g}^{\text{react}}F^{\text{react}}\right)_{i\pm1/2}^{l,g} + \\ \end{split}$$

— средний реактивный поток на границах і -й ячейки для газовой фазы;

 $\chi^{\mbox{\tiny react}}_{
m g}$ — фазовый коэффициент для реактивного потока газовой фазы.

| Топологическая реализация | Образование фронта испарения | Фазовый коэффициент χ^*_l |
|--|---------------------------------------|--|
| «Жидкость — жидкость» (<i>l</i> , <i>l</i>) | Слева от контактного разрыва | $\begin{cases} \alpha_l^*, \ если \ \sigma < 0 < u^*, \\ 1 \ в \ иных \ случаях, \\ \alpha_l^* \ - \ объемная \ доля \ жидкой \ фазы \\ за \ фронтом \ испарения; \\ \sigma \ - \ скорость \ фронта \ испарения; \\ u^* \ - \ скорость \ контактного \ разрыва \end{cases}$ |
| | Справа от контактного разрыва | $\begin{cases} \alpha_l^*, \text{ если } u^* < 0 < \sigma, \\ 1 в иных случаях. \end{cases}$ |
| | Справа и слева от контактного разрыва | $\begin{cases} \left(\alpha_l^*\right)_{\text{right}}, \ \text{если} \ u^* < 0 < \sigma_{\text{right}}, \\ \left\{\alpha_l^*\right)_{\text{left}}, \ \text{если} \ \sigma_{\text{left}} < 0 < u^*, \\ 1 \ \text{в иных случаях,} \end{cases} \\ \left(\alpha_l^*\right)_{\text{right}} - \text{объемная доля жидкой} \\ \phi \text{азы за правым фронтом испарения;} \\ \left(\alpha_l^*\right)_{\text{left}} - \text{объемная доля жидкой} \\ \phi \text{азы за левым фронтом испарения;} \\ \sigma_{\text{right}} - \text{скорость правого фронта} \\ \text{испарения;} \\ \sigma_{\text{left}} - \text{скорость левого фронта} \\ \text{испарения} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испарения | 1 |

Таблица 1. Фазовый коэффициент для жидкой фазы при вычислении потока Эйлера

Табл. 1 (окончание)

| «Газ — жид- кость» (g, l) | Есть фронт испарения | $\begin{cases} \alpha_{l}^{*}, если u^{*} < 0 < \sigma, \\ 0, если u^{*} \ge 0, \\ 1 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
|---|----------------------|---|
| | Нет фронта испарения | $\begin{cases} 1, \ \text{если} \ u^* < 0, \\ 0 \ \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| «Жидкость — газ» (<i>l</i> , <i>g</i>) | Есть фронт испарения | $\begin{cases} \alpha_l^*, \ если \ \sigma < 0 < u^*, \\ 0, \ если \ u^* < 0, \\ 1 \ в \ иных \ случаях. \end{cases}$ |
| | Нет фронта испарения | $\begin{cases} 1, \ если \ u^* > 0, \\ 0 \ в \ иных \ случаях. \end{cases}$ |

Таблица 2. Фазовый коэффициент для жидкой фазы при вычислении потока Лагранжа

| Топологическая реализация | Образование фронта испарения | Фазовый коэффициент $\chi^{	ext{lag}}_{l}$ |
|--|---|---|
| «Жидкость — жидкость» (<i>l,l</i>) | Слева от контакт- ного разрыва | $\begin{cases} (1-\alpha_l^*), если \ u^* > 0, \\ 0 \ в иных случаях, \\ \alpha_l^* \ — объемная доля жидкой фазы за фронтом испарения; \\ u^* \ — скорость контактного разрыва$ |
| | Справа от контакт- ного разрыва | $\begin{cases} -(1 - \alpha_l^*), \text{ если } u^* > 0, \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Справа и слева от контактного раз- рыва | $\begin{cases} \operatorname{sign}\left(\left(\alpha_{l}^{*}\right)_{\operatorname{right}}-\left(\alpha_{l}^{*}\right)_{\operatorname{left}}\right), \ \operatorname{если} \ u^{*}>0, \\ 0 \ \mathrm{в} \ \mathrm{иныx} \ \mathrm{случаяx}, \\ \left(\alpha_{l}^{*}\right)_{\operatorname{right}} - \ \mathrm{obsemhas} \ \mathrm{долs} \ \mathrm{жидкой} \ \mathrm{фasu} \\ \operatorname{зa} \ \mathrm{правым} \ \mathrm{фронтом} \ \mathrm{испарениs}; \\ \left(\alpha_{l}^{*}\right)_{\operatorname{left}} - \ \mathrm{obsemhas} \ \mathrm{долs} \ \mathrm{жидкой} \ \mathrm{фasu} \\ \operatorname{зa} \ \mathrm{левым} \ \mathrm{фронтом} \ \mathrm{испарениs} \end{cases}$ |

Табл. 2 (окончание)

| | Нет фронта испа- рения | 0 |
|---|---------------------------|--|
| «Газ — жид- кость» (g, l) | Есть фронт испа- рения | $\begin{cases} \alpha_{l}^{*}, \ \text{если} \ u^{*} > 0, \\ 0 \ \text{в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испа- рения | $\begin{cases} 1, если u^* > 0, \\ 0 в иных случаях. \end{cases}$ |
| «Жидкость — газ» (<i>l</i> , <i>g</i>) | Есть фронт испа- рения | $\begin{cases} -\alpha_l^*, \text{ если } u^* > 0, \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испа- рения | $\begin{cases} -1, \ \text{если} \ u^* > 0, \\ 0 \ \text{в иных случаях.} \end{cases}$ |

Таблица 3. Фазовый коэффициент для жидкой фазы при вычислении реактивного потока

| Топологическая реализация | Образование фронта испарения | Фазовый коэффициент $\chi_g^{ m react}$ |
|---|----------------------------------|---|
| «Жидкость — жидкость (<i>l</i> , <i>l</i>) | Слева от контактного разрыва | $\begin{cases} -(1-\alpha_l^*), \ если \ \sigma > 0, \\ 0 \ в \ иных \ случаях, \\ \alpha_l^* \ — объемная \ доля \ жидкой \\ фазы \ за \ фронтом \ испарения; \\ \sigma \ — скорость \ фронта \ испарения \end{cases}$ |
| | Справа от контактного разрыва | $\begin{cases} (1 - \alpha_l^*), \text{ если } \sigma > 0. \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испарения | 0 |
| «Газ — жидкость» (g,l) | Есть фронт испарения | $\begin{cases} (1 - \alpha_l^*), \text{ если } \sigma > 0, \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испарения | 0 |
| «Жидкость — газ» (<i>l</i> , <i>g</i>) | Есть фронт испарения | $\begin{cases} -(1-\alpha_{l}^{*}), \text{ если } \sigma > 0, \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$ |
| | Нет фронта испарения | 0 |

5. Результаты

В данной части описываются одномерные расчеты, выполненные с использованием метода RDEM.

Задача о кавитации в жидком додекане с образованием фронта частичного испарения моделируется следующим образом. Вся расчетная область [0;1] заполнена жидким додеканом с плотностью 700 кг/м³ при атмосферном давлении. Жидкость в левой части [0;0,5] приводится в движение со скоростью –100 м/с, а в правой [0,5;1] — со скоростью 100 м/с. Математическая модель RDEM предполагает наличие двух фаз, поэтому при проведении вычислений в расчетную область вводится газовая фаза с плотностью 10⁻⁴ кг/м³ и объемной долей 10⁻⁸. Начальные данные представлены в табл. 4.

| Левая сторона | Правая сторона |
|---|---|
| $\rho_l = 600 \text{кг/m}^3$ | $ρ_l = 600 \ \text{kg/m}^3$ |
| $P_l = 10^5 \Pi a$ | $P_{l} = 10^{5} \Pi a$ |
| $u_l = -100 \text{ m/c}$ | $u_l = 100 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_{l} = 2,19$ | $\gamma_{l} = 2,19$ |
| $\pi_l = 4 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 4 \cdot 10^8 \Pi a$ |
| $q_l = -755 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_l = -755 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $q'_l = 0$ Дж/кг/К | $q'_l = 0$ Дж/кг/К |
| <i>С_{v,l}</i> =1077 Дж/кг/К | <i>С_{v,l}</i> = 1077 Дж/кг/К |
| $\rho_g = 10^{-4} \text{ KG/m}^3$ | $\rho_g = 10^{-4} \text{ кг/m}^3$ |
| $P_{g} = 10^{5} \Pi a$ | $P_{g} = 10^{5} \Pi a$ |
| $u_g = -100 \text{ M/c}$ | $u_g = 100 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_{g} = 1,025$ | $\gamma_{g} = 1,025$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $q_g = -237 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_{g} = -237 \cdot 10^{3} \text{ Дж/кг}$ |
| $q'_{g} = -24 \cdot 10^{3} \text{Дж/кг/K}$ | $q'_{g} = -24 \cdot 10^{3}$ Дж/кг/К |
| <i>С_{v,g}</i> = 1956 Дж/кг/К | <i>С</i> _{у,g} =1956 Дж/кг/К |
| $\alpha_{g} = 10^{-8}$ | $\alpha_{g} = 10^{-8}$ |
| $M_{g} = 0,17$ кг/моль | $M_{g} = 0,17$ кг/моль |

| Таблица 4. | Начальные | данные д | 1 ля р | асчета | кавитац | ии |
|------------|-----------|----------|---------------|--------|---------|----|
| | в жид | ком доде | екане | 5 | | |

Задача о кавитации в воде с образованием фронта частичного испарения моделируется следующим образом. Вся расчетная область [0; 1] заполнена водой с плотностью 1000 кг/м³ при атмосферном давлении. Жидкость в левой части [0; 0, 5] приводится в движение со скоростью –170 м/с, а в правой [0,5;1] — со скоростью 170 м/с. Математическая модель RDEM предполагает наличие двух фаз, поэтому при проведении вычислений в расчетную область вводится газовая фаза с плотностью 10⁻⁴ кг/м³ и объемной долей 10⁻¹.

Начальные данные представлены в табл. 5.

| Левая сторона | Правая сторона |
|--------------------------------------|---|
| $\rho_l = 1000 \mathrm{kr/m^3}$ | $ρ_l = 1000 \text{ kg/m}^3$ |
| $P_l = 10^5 \text{ Ha}$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ |
| $u_{l} = -170 \text{ m/c}$ | $u_l = -170 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_1 = 2,35$ | $\gamma_1 = 2,35$ |
| $\pi_l = 1 \cdot 10^9 \Pi a$ | $\pi_l = 1 \cdot 10^9 \Pi a$ |
| $q_l = -1167 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_{_{l}} = -1167 \cdot 10^{_{3}}$ Дж/кг |
| $q'_l = 0$ Дж/кг/К | $q'_l = 0$ Дж/кг/К |
| <i>С_{v,l}</i> =1816 Дж/кг/К | $C_{v,l} = 1816$ Дж/кг/К |
| $ρ_g = 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ | $\rho_g = 10^{-4} \text{ кг/m}^3$ |
| $P_g = 10^5 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ |
| $u_g = -170 \text{ m/c}$ | $u_g = -170 \text{ m/c}$ |
| $\gamma_g = 1,43$ | $\gamma_g = 1,43$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $q_g = 2030 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_g = 2030 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $q_g' = -23396 \cdot 10^3 $ Дж/кг/К | $q_g^{'} = -23396 \cdot 10^3$ Дж/кг/К |
| $C_{v,g} = 1040 \text{Дж/кг/K}$ | <i>С</i> _{<i>v</i>,<i>g</i>} =1040 Дж/кг/К |
| $\alpha_{g} = 10^{-1}$ | $\alpha_{g} = 10^{-1}$ |
| $M_{g} = 0,018$ кг/моль | $M_{g} = 0,018$ кг/моль |

Таблица 5. Начальные данные для расчета кавитации в воде

Графики итерационной функции $F(P^*)$ из (16) в случае топологической реализации «жидкость — жидкость» с образованием двух фронтов испарения для параметров воды и додекана из табл. 5 и 4 с разными начальными скоростями разлета представлены на рис. 6.

Результаты расчета с числом Куранта 0,8 на сетке 100 в момент времени 300 мкс представлены на рис. 7 для додекана и на рис. 8 для воды. Показаны профили давления двухфазной смеси (*a*), объемной доли газа (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*), а также профиль массовой доли образовавшегося газа (*г*). Решение состоит из двух симметричных волн разрежения, распространяющихся в жидкости справа и слева от первоначального разрыва в профиле скорости. При заданных начальных условиях амплитуда волн разрежения настолько велика, что кинетическое предельное СЈсоотношение является наиболее подходящим. Однако в общем случае поток массы через фронт испарения может быть гораздо меньше максимального, как в случае медленных процессов под влиянием капиллярных эффектов. При выборе другого кинетического соотношения с использованием, например, капиллярной модели оно легко может быть интегрировано в реактивный римановский солвер вместо СЈ-соотношения.



Рис. 6. Итерационная функция $F(P^*)$ из (16) в случае топологической реализации «жидкость — жидкость» с образованием двух фронтов испарения для параметров воды (*a*) с начальными скоростями разлета (сверху вниз) 170, 165, 160, 155 и 150 м/с и додекана (*б*) с начальными скоростями разлета (сверху вниз)

130, 120, 100, 80, 60 и 40 м/с

Задача о распаде разрыва в додекане с образованием фронта частичного испарения моделируется следующим образом. Правая часть расчетной области [0,5;1] заполнена жидким додеканом с плотностью 600 кг/м³ при атмосферном давлении. В левой части расчетной области [0;0,5] содержится газ додекана с плотностью 10⁻⁴ кг/м³ при низком давлении 100 Па. Скорость обеих сред в начальный момент равна нулю. Начальные данные представлены в табл. 6.

| Левая сторона | Правая сторона |
|----------------------------------|---|
| $ρ_l = 600 \text{ kg/m}^3$ | $ρ_l = 600 \text{ kg/m}^3$ |
| $P_l = 10^2 \Pi a$ | $P_l = 10^5 \Pi a$ |
| $u_l = 0 \text{ M/c}$ | $u_l = 0 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_l = 2,19$ | $\gamma_l = 2,19$ |
| $\pi_l = 4 \cdot 10^8 \Pi a$ | $\pi_l = 4 \cdot 10^8 \Pi a$ |
| $q_l = -755 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_1 = -755 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $q'_l = 0$ Дж/кг/К | $q'_l = 0$ Дж/кг/К |
| $C_{v,l} = 1077$ Дж/кг/К | $C_{v,l} = 1077$ Дж/кг/К |
| $ ho_g = 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ | $ ho_g = 10^{-4} \text{ kg/m}^3$ |
| $P_g = 10^2 \Pi a$ | $P_g = 10^5 \Pi a$ |
| $u_g = 0 \text{ M/c}$ | $u_g = 0 \text{ M/c}$ |
| $\gamma_g = 1,025$ | $\gamma_g = 1,025$ |
| $\pi_g = 0 \Pi a$ | $\pi_g = 0 \Pi a$ |
| $q_g = -237 \cdot 10^3$ Дж/кг | $q_g = -237 \cdot 10^3$ Дж/кг |
| $q'_g = -24 \cdot 10^3$ Дж/кг/К | $q'_{g} = -24 \cdot 10^{3} \text{ Дж/кг/K}$ |
| С _{v,g} =1956 Дж/кг/К | <i>С_{v,g}</i> =1956 Дж/кг/К |
| $\alpha_g = 1 - 10^{-8}$ | $\alpha_{g} = 10^{-8}$ |
| $M_g = 0,17$ кг/моль | $M_g = 0,17$ кг/моль |

Таблица 6. Начальные данные для расчета распада разрыва в додекане



Рис. 7. Профили давления двухфазной смеси (*a*), объемной доли газа (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*), а также профиль массовой доли образовавшегося газа (*г*) для задачи кавитации в жидком додекане



Рис. 7 (окончание)
Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

Результаты расчета с числом Куранта 0,8 на сетке 100 в момент времени 300 мкс представлены на рис. 9. Показаны профили скорости двухфазной смеси (*a*), плотности двухфазной смеси (*б*) и давления (*b*). Решение состоит из ударной волны, распространяющейся в область с низким давлением, и волны разрежения, двигающейся в область с жидкой фазой. Жидкая фаза становится перегретой и испаряется с образованием фронта испарения.



Рис. 8. Профили давления двухфазной смеси (*a*), объемной доли газа (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*), а также профиль массовой доли образовавшегося газа (*г*) для задачи кавитации в воде





в

Рис. 9. Профили скорости двухфазной смеси (*a*), плотности (*б*) и давления двухфазной смеси (*в*) для задачи о распаде разрыва в додекане

6. Заключение

В данной работе приведена методика расчета двухфазных газодинамических течений, в которых могут происходить процессы испарения. Испарение моделируется как взрывной процесс, при котором формируется дозвуковая ударная волна, распространяющаяся по перегретой жидкости. За фронтом ударной волны образуется смесь жидкости и пара в термодинамическом равновесии. Газодинамические параметры с обеих сторон от ударной волны удовлетворяют уравнениям Эйлера и связаны между собой соотношениями Рэнкина—Гюгонио. Для вычисления параметров образующейся двухфазной смеси используется замыкающее кинетическое соотношение, которое соответствует максимально возможной скорости перетекания массы через фронт испарения. При вычислениях предполагается, что каждая фаза удовлетворяет уравнению состояния stiffened. Описанная модель была адаптирована для использования в методе DEM [6], в котором используется усреднение по всем возможным топологическим реализациям двухфазной смеси. Для этого был разработан реактивный римановский солвер, учитывающий возможность образования дозвуковых фронтов испарения.

С использованием описанной методики были проведены одномерные расчеты кавитации в додекане и воде, а также расчет распада разрыва в додекане. Необходимо отметить, что использование в качестве замыкающего кинетического выражения соотношения, соответствующего максимально возможной скорости перетекания массы через фронт испарения, применимо только в случае сильного испарения. При более медленном испарении необходимо использовать другое соотношение, хотя интеграция нового выражения в описанную методику не представляет проблемы. Переход к двумерным расчетам легко реализуется с использованием метода расщепления по направлениям [13].

Литература

- Simoes-Moreira J. R., Shepherd J. E. Evaporation waves in superheated dodecane // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 382. — P. 63—86.
- Reinke P., Yadigaroglu G. Explosive vaporization of superheated liquids by boiling fronts // Int. J. Multiphase Flows. — 2001. — Vol. 27. — P. 1487—1516.
- Jamet D., Lebaigue O., Courtis N., Delhaye J. M. The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid-vapor flows with phase change // J. Comput. Phys. — 2001. — Vol. 169. — P. 624—651.
- 4. *Godlewski E., Raviart P.-A.* Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws // Apllied Mathematical Sciences. 1996. Vol. 118.
- Teng Z.-H., Chorin A. J., Liu T.-P. Riemann problems for reacting gas, with applications to transition // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — Vol. 42 (5). — P. 964—981.
- Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. Vol. 186. — P. 361—396.
- Le Metayer O., Massoni J., Saurel R. Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 205. — P. 576—610.
- Le Metayer O., Massoni J., Saurel R. Elaboration des lois d'Etat d'un liquide et de sa vapeur pour les modeles d'Ecoulements disphasiques // Int. J. Thermal Sci. — 2003. — Vol. 43. — P. 265—276.
- Chorin A. J. Random choice methods with applications to reacting gas flow // J. Comput. Phys. — 1977. — Vol. 25. — P. 253—272.
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
- 11. Drew D. A., Passman S. L. Theory of multicomponent fluids. [S. l.]: Springer, 1998.
- Gavrilyuk S., Saurel R. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 175 (1). — P. 326—360.
- Leonov A., Chudanov V. A discrete equation method for two-dimensional calculations of two-phase compressible mixtures // Proceedings of the 17th International Conference on Nuclear Engineering, № 75586.

Численное моделирование фазовых переходов в перегретой жидкости

1. Введение

Связанные с быстрым и даже взрывным испарением явления кавитации имеют место как в естественных условиях, так и в промышленных процессах. Например, обтекание потоком жидкости внутренних сопл инжекторных двигателей, сверхзвуковых снарядов, аэродинамических поверхностей и т. д. может сопровождаться кавитацией, которая, в свою очередь, способна приводить к сильным и резким возмущениям в гидродинамических системах. В большинстве случаев из-за геометрических эффектов кавитация является двумерным или трехмерным процессом, что сильно затрудняет ее экспериментальное и теоретическое изучение, поэтому актуальным является численное моделирование подобных явлений, а именно фазовых переходов в перегретой жидкости.

Существующие равновесные по давлению и температуре двухфазной среды модели фазовых переходов в перегретой жидкости обладают рядом существенных недостатков. Уравнения Эйлера для двухфазной смеси с кубическим уравнением состояния [3] могут приводить к «нефизичным» решениям в областях, где скорость звука принимает отрицательные значения. Использование табулированного уравнения состояния или комбинации уравнений состояния каждой из фаз в предположении равенства давлений, температур и химического потенциала исправляет эту ситуацию [4], но не позволяет моделировать появление нестабильных состояний. Введение четвертого уравнения для массовой доли с релаксационным членом [5] также не дает возможности моделировать поведение границы раздела фаз «жидкость — неконденсируемый пар», так как изотермическое приближение на таком интерфейсе «нефизично».

Неравновесная по температуре модель из шести уравнений [6] является гиперболической в ограниченной области применений. Введение седьмого уравнения для объемной доли одного из компонентов двухфазной смеси позволяет получить полностью гиперболическую модель [7], которая имеет более широкий спектр применений. Она применима не только для расчетов интерфейсных задач, но и для расчетов двухфазных потоков с разными скоростями каждой из фаз [8; 9]. Модель из семи уравнений была модифицирована для расчетов образования и распространения фронтов испарения при кавитации [10]. Результаты расчетов кавитирующих потоков, выполненные с использованием модифицированной модели, показали хорошее согласие с экспериментальными данными. Основными недостатками полученной модели являются громоздкость при программной реализации и отсутствие информации о структуре фронта испарения, который моделируется как резкий разрыв.

В данной работе для численного моделирования процессов фазового перехода в кавитирующих потоках применялась равновесная по скорости и давлению модель из пяти уравнений [1; 2]: двух уравнений сохранения массы каждой из фаз, одного уравнения сохранения полного импульса двухфазной смеси, уравнения сохранения полной энергии двухфазной смеси и уравнения для объемной доли. Эта модель применима как к простым контактным разрывам с непрерывными профилями давления и скорости, так и к переходным фронтам со скачками давления и скорости, на которых происходят межфазовые массообмен и теплообмен. Образование таких фронтов соответствует появлению в двухфазной системе дополнительных волн. В модели каждая фаза в двухфазной смеси обладает собственными температурой и энтропией. Значения давления и скорости являются общими для обеих фаз. Замыкание достигается с использованием двух уравнений состояния каждой из фаз, которые воспроизводят фазовую диаграмму при равновесном состоянии. Равновесие достигается в ходе процесса мгновенной релаксации температур и химических потенциалов. Мгновенная релаксация происходит только в области фронта испарения, сохраняя нестабильные состояния вдали от фронта. Описываемая в данной работе неравновесная по температуре и химическому потенциалу модель двухфазной среды благодаря возможности расчета появления нестабильных состояний и специальному конструированию мгновенной релаксационной процедуры позволяет разрешать внутреннюю структуру фронта испарения. Недостатки базовой модели из пяти уравнений, связанные с неконсервативной формой уравнения для объемной доли, преодолеваются использованием полученных в [11] соотношений на фронте ударной волны в двухфазной среде, а также использованием лагранжева подхода [12].

В разделе 2 описывается вывод базовой модели из пяти уравнений. В разделе 3 описывается модель массообмена. В разделе 4 приводится описание численного решения гиперболической части системы уравнений, описывающих двухфазную среду, а также описание численного метода для процедуры мгновенной релаксации температур и химических потенциалов в двухфазной среде. В разделе 5 представлены результаты расчета одномерных задач в присутствии массообмена и без него.

2. Вывод базовой модели

В настоящей работе в основе методики моделирования процессов фазового перехода в кавитирующих потоках лежит двухфазная модель из пяти уравнений с общими значениями давлений и скоростей каждой из фаз. Эта модель, в свою очередь, является асимптотическим пределом двухфазной неравновесной модели семи уравнений с разными значениями давлений и скоростей [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u}_{l} \times \nabla \alpha_{1} = \mu \times (p_{1} - p_{2}), \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}_{1}) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{1} \rho_{k} \vec{u}_{k} \otimes \vec{u}_{k}) + \nabla (\alpha_{1} p_{1}) = p_{l} \nabla \alpha_{1} + \lambda (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}), \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} E_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{1} (\rho_{1} E_{1} + p_{1}) \vec{u}_{1}) = p_{l} u_{l} \nabla \alpha_{1} + \lambda \vec{u}_{l} \cdot (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}) - p_{l} \mu (p_{1} - p_{2}) + Q_{1}, \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{2} \rho_{k} \vec{u}_{k} \otimes \vec{u}_{k}) + \nabla (\alpha_{2} p_{2}) = p_{l} \nabla \alpha_{2} + \lambda (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}), \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} \vec{u}_{2}}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{2} (\rho_{2} E_{2} + p_{2}) \vec{u}_{2}) = p_{l} u_{l} \nabla \alpha_{2} - \lambda \vec{u}_{l} \cdot (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}) + p_{l} \mu (p_{1} - p_{2}) - Q_{1}, \end{cases}$$

где $\alpha_k, \rho_k, u_k, p_k$ и E_k — объемная доля, плотность, вектор скорости, давление и полная энергия на единицу массы фазы k, k = 1, 2; $E_k = e_k + \frac{u_k^2}{2}$, e_k — внутренняя энергия на единицу массы фазы k; нижние числовые индексы соответствуют номерам фаз; нижний индекс «l» соответствует величинам на интерфейсной границе раздела фаз.

Теплообмен моделируется следующим образом:

$$Q_1 = H(T_2 - T_1) = h \times S_l,$$
 (2)

где H — коэффициент эффективной теплопередачи; h — коэффициент конвективной теплопередачи; S_t — интерфейсная поверхность теплообмена.

Коэффициенты, описывающие механическое взаимодействие фаз и определяющие скорость достижения механического равновесия в двухфазной системе, моделируются так [13]:

$$\mu = \frac{S_l}{Z_1 + Z_2},$$

$$\lambda = Z_1 \times Z_2 \times \mu,$$
(3)

где

$$Z_k = \rho_k c_k.$$

Значения интерфейсных значений параметров находятся из выражений:

$$P_{l} = \frac{Z_{1}p_{2} + Z_{2}p_{1}}{Z_{1} + Z_{2}} + \operatorname{sign}\left(\frac{\partial\alpha_{1}}{\partial x}\right) \frac{(u_{2} - u_{1})Z_{1}Z_{2}}{Z_{1} + Z_{2}},$$

$$u_{l} = \frac{Z_{1}u_{1} + Z_{2}u_{2}}{Z_{1} + Z_{2}} + \operatorname{sign}\left(\frac{\partial\alpha_{1}}{\partial x}\right) \frac{p_{2} - p_{1}}{Z_{1} + Z_{2}}.$$
(4)

Система (1) с коэффициентами релаксации из (3) и интерфейсными величинами из (4) удовлетворяет второму закону термодинамики и является полностью гиперболической с характеристическими скоростями: $u_k, u_k + c_k, u_k - c_k, k = 1, 2$. Однако в системе (1) присутствуют два различных значения для скорости и давления. Чтобы перейти к модели с общими величинами скорости и давления и при численном решении вместо громоздкой процедуры усреднения по различным топологическим реализациям [14] использовать полученные в [11] соотношения на фронте ударной волны в двухфазной среде, необходимо рассмотреть предельные соотношения для мгновенной механической релаксации [2]:

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}$$
при $\varepsilon \to 0^+$. (5)
 $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$

Предельные соотношения (5) для системы (1) проще рассматривать в примитивных переменных. Тогда система (1) будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) + \Phi(U), \tag{6}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1} \\ \vec{u}_{1} \\ p_{1} \\ \alpha_{2}\rho_{2} \\ \vec{u}_{2} \\ p_{2} \end{pmatrix};$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} -u_{l}\nabla\alpha_{1} \\ -\operatorname{div}(\alpha_{1}\rho_{1}\vec{u}_{1}) \\ -\vec{u}_{1}\nabla\vec{u}_{1} - \frac{1}{\rho_{1}}\nabla p_{1} + \frac{p_{l} - p_{1}}{\alpha_{1}\rho_{1}}\nabla\alpha_{1} \\ -\rho_{1}c_{1}^{2}\operatorname{div}(\vec{u}_{1}) + \frac{\Gamma_{1}}{\alpha_{1}} \left[p_{l} - \rho_{1}^{2} \left(\frac{\partial e_{1}}{\partial \rho_{1}} \right)_{p_{1}} \right] (\vec{u}_{l} - \vec{u}_{1}) \cdot \nabla\alpha_{1} - \vec{u}_{1}\nabla p_{1} \\ -\operatorname{div}(\alpha_{2}\rho_{2}\vec{u}_{2}) \\ -\operatorname{div}(\alpha_{2}\rho_{2}\vec{u}_{2}) \\ -\vec{u}_{2}\nabla\vec{u}_{2} - \frac{1}{\rho_{2}}\nabla p_{2} + \frac{p_{l} - p_{2}}{\alpha_{2}\rho_{2}}\nabla\alpha_{2} \\ -\rho_{2}c_{2}^{2}\operatorname{div}(\vec{u}_{2}) + \frac{\Gamma_{2}}{\alpha_{2}} \left[p_{l} - \rho_{2}^{2} \left(\frac{\partial e_{2}}{\partial \rho_{2}} \right)_{p_{2}} \right] (\vec{u}_{l} - \vec{u}_{2}) \cdot \nabla\alpha_{2} - \vec{u}_{2}\nabla p_{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(U) = \begin{pmatrix} \mu(p_1 - p_2) \\ 0 \\ \frac{\lambda}{\alpha_1 \rho_1} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ -\mu \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \left[p_l - \rho_1^2 \left(\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1} \right)_{p_1} \right] (p_l - p_2) + \lambda \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} (\vec{u}_l - \vec{u}_1) (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} Q_1 \\ 0 \\ -\frac{\lambda}{\alpha_2 \rho_2} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ \mu \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \left[p_l - \rho_2^2 \left(\frac{\partial e_2}{\partial \rho_2} \right)_{p_2} \right] (p_l - p_2) - \lambda \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} (\vec{u}_l - \vec{u}_2) (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) + \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} Q_1 \end{pmatrix}$$

$$c_{k}^{2} = \frac{\frac{p_{k}}{\rho_{k}^{2}} - \left(\frac{\partial e_{k}}{\partial \rho_{k}}\right)_{p_{k}}}{\frac{p_{k}}{\rho_{k}^{2}} - \left(\frac{\partial e_{k}}{\partial p_{k}}\right)_{\rho_{k}}}$$

— скорость звука для фазы k, k = 1, 2;

$$\Gamma_{k} = \frac{1}{\rho_{k}} \left(\frac{\partial p_{k}}{\partial e_{k}} \right)_{\rho_{k}}$$

— коэффициент Грюнайзена для фазы k, k = 1, 2.

С учетом соотношений (3) и (5) система (6) может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = F(U) + \frac{1}{\varepsilon} \Psi(U) + Q(U), \tag{7}$$

где

$$\Psi(U) = \begin{pmatrix} (p_1 - p_2) \\ 0 \\ \frac{Z_1 Z_2}{\alpha_1 \rho_1} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ -\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} \left[p_l - \rho_1^2 \left(\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1} \right)_{\rho_1} \right] (p_l - p_2) + \frac{Z_1 Z_2 \Gamma_1}{\alpha_1} (\vec{u}_l - \vec{u}_1) (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ 0 \\ -\frac{Z_1 Z_2}{\alpha_2 \rho_2} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \\ \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \left[p_l - \rho_2^2 \left(\frac{\partial e_2}{\partial \rho_2} \right)_{\rho_2} \right] (p_l - p_2) - \frac{Z_1 Z_2 \Gamma_2}{\alpha_2} (\vec{u}_l - \vec{u}_2) (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} Q_1 \end{pmatrix}$$

$$Q(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Gamma_1}{\alpha_1} Q_1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\Gamma_2}{\alpha_2} Q_1 \end{pmatrix}$$

Предполагая непрерывность и дифференцируемость функций $\Psi(U^{\varepsilon}), F(U^{\varepsilon})$ и $Q(U^{\varepsilon})$ вблизи положения механического равновесия двухфазной системы $U_0: U^{\varepsilon} = U_0 + \varepsilon U_1 + O(\varepsilon^2)$, можно представить систему (7) в виде

Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial t} = F(U_0) + \varepsilon \frac{\partial F(U)}{\partial U}(U_0)U_1 + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(U_0) + \\ + \frac{\partial \Psi(U)}{\partial U}(U_0)U_1 + Q(U_0) + \\ + \varepsilon \frac{\partial Q(U)}{\partial U}(U_0)U_1 + O(\varepsilon^2).$$
(8)

Так как в равновесном состоянии U_0 : $u_1^0 = u_2^0 = u^0$ и $p_1^0 = p_2^0 = p^0$, то

$$\Psi(U_0) = 0. \tag{9}$$

С учетом (9), а также пренебрегая малыми членами в системе (8), можно получить

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = F(U_0) + \frac{\partial \Psi(U)}{\partial U}(U_0)U_1 + Q(U_0).$$
(10)

В явном виде система (10) имеет вид

$$\left(\frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_{1} = \frac{\alpha_{1} \alpha_{2} \left(\rho_{2} c_{2}^{2} - \rho_{1} c_{1}^{2} \right)}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \times \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\alpha_{1} \alpha_{2}}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \left(\frac{\Gamma_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\Gamma_{2}}{\alpha_{2}} \right) Q_{1}, \\
\frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}_{1} \right) = 0, \\
\frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{2} \rho_{2} \vec{u}_{2} \right) = 0, \\
\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \right) + \nabla \left(p \right) = 0, \\
\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{u} \left(\rho E + p \right) \right) = 0,
\end{cases}$$
(11)

где $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ — плотность двухфазной смеси; $E = Y_1 E_1 + Y_2 E_2$ полная энергия единицы массы двухфазной смеси; $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$ — массовая доля фазы k, k = 1, 2.

Система уравнений (11) описывает двухфазную среду в механическом, но не в тепловом равновесии. То есть каждая из фаз имеет собственные температуру и химический потенциал.

3. Моделирование массообмена

В данной модели каждая фаза описывается собственным уравнением состояния и имеет собственное значение энтропии. Этим обеспечивается возможность присутствия нестабильных состояний (перегретой жидкости), а также возможность рассчитывать массообмен как кинетический, а не как термодинамический процесс в случае кубического уравнения состояния [3]. В этом случае скорость звука двухфазной смеси определена для любого ее состояния. Параметры уравнений состояния фаз связаны условием согласованности с фазовой кривой при достижении равновесного состояния по температуре и химическому потенциалу [10]. Для уравнения состояния вида

$$e(P,\rho) = \frac{P + \gamma \pi}{(\gamma - 1)\rho} C_{\nu} T + q$$
(12)

или

$$\rho(P,\rho) = \frac{P+\pi}{(\gamma-1)C_{\nu}T},$$
(13)

где T — температура; C_{ν} — теплоемкость при постоянном объеме; γ , π — константы, характеризующие свойства вещества; q — энергия фазы в заданном состоянии,

это условие будет следующим:

$$\ln(P + \pi_1) = A + \frac{B}{T} + C \ln T + D \ln(P + \pi_2),$$
(14)

где

$$A = \frac{\gamma_{2} \times (C_{\nu})_{2} - \gamma_{1} \times (C_{\nu})_{1} + q_{1}' - q_{2}'}{(\gamma_{1} - 1) \times (C_{\nu})_{1}};$$
$$B = \frac{q_{2} - q_{1}}{(\gamma_{1} - 1) \times (C_{\nu})_{1}};$$

121

$$C = \frac{\gamma_{1} \times (C_{\nu})_{1} - \gamma_{2} \times (C_{\nu})_{2}}{(\gamma_{1} - 1) \times (C_{\nu})_{1}};$$
$$D = \frac{(\gamma_{2} - 1) \times (C_{\nu})_{2}}{(\gamma_{1} - 1) \times (C_{\nu})_{1}}.$$

Для обеспечения возможности моделировать массообмен, необходимо ввести дополнительные члены в уравнения для сохранения массы из системы (11):

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \vec{u}) = \rho \dot{Y}_1, \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \rho_1 \vec{u}) = -\rho \dot{Y}_1, \end{cases}$$
(15)

где $\rho \dot{Y_1}$ — поток массы от фазы 2 к фазе 1.

Процесс массообмена приводит к изменению объемной доли, и этот эффект необходимо учесть, добавив соответствующий член в первое уравнение системы (11):

$$\frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_{1} = \frac{\alpha_{1} \alpha_{2} \left(\rho_{2} c_{2}^{2} - \rho_{1} c_{1}^{2} \right)}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \times \operatorname{div} \vec{u} + \frac{\alpha_{1} \alpha_{2}}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}} \right) Q_{1} + \frac{\rho \dot{Y}_{1}}{\rho_{I}},$$

$$(16)$$

где ρ_I — модельный параметр.

Выражения для скорости испарения \dot{Y}_1 и интерфейсной плотности ρ_7 определяются из анализа соотношений для энтропии двухфазной смеси. Комбинируя уравнения для импульса и полной энергии двухфазной смеси из системы (11), можно получить:

$$\frac{de}{dt} + p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = 0, \tag{17}$$

где $e = Y_1 e_1 + Y_2 e_2$ — внутренняя энергия двухфазной смеси; $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ — плотность двухфазной смеси.

Выражение (17) можно также представить в виде

$$Y_{1}\left(\frac{de_{1}}{dt}+p\frac{d\left(\frac{1}{\rho_{1}}\right)}{\partial t}\right)+Y_{2}\left(\frac{de_{2}}{dt}+p\frac{d\left(\frac{1}{\rho_{2}}\right)}{\partial t}\right)+(h_{1}-h_{2})\dot{Y}_{1}=0,$$
 (18)

где $h_k = e_k + p \frac{1}{\rho_k}$ — энтальпия фазы k.

Далее, используя в (18) соотношения Гиббса

$$\frac{de_k}{dt} + p \frac{d\left(\frac{1}{\rho_k}\right)}{dt} = T_k \frac{ds_k}{dt}$$

для каждой из фаз, можно получить:

$$Y_1 T_1 \frac{ds_1}{dt} + Y_2 T_2 \frac{ds_2}{dt} + \left(h_1 - h_2\right) \dot{Y}_1 = 0.$$
(19)

В выражении (19) функции $\frac{ds_1}{dt}$ и $\frac{ds_2}{dt}$ являются модельными параметрами, которые необходимо определить.

Используя условие равенства давлений каждой из фаз $p_1(\rho_1, s_1) = p_2(\rho_2, s_2)$, можно записать:

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}\right)_{S_1} \frac{d\rho_1}{dt} + \left(\frac{\partial p_1}{\partial S_1}\right)_{\rho_1} \frac{dS_1}{dt} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}\right)_{S_2} \frac{d\rho_2}{dt} + \left(\frac{\partial p_2}{\partial S_2}\right)_{\rho_2} \frac{dS_2}{dt}.$$
 (20)

С учетом определения скорости звука и коэффициента Грюнайзена для каждой из фаз $\left(\frac{\partial p_k}{\partial \rho_k}\right)_{S_k} = c_k^2$ и $\left(\frac{\partial p_k}{\partial S_k}\right)_{\rho_k} = \rho_k \Gamma_k T_k$ соответственно выраже-

ние (20) примет вид

$$c_{1}^{2} \frac{d\rho_{1}}{dt} + \rho_{1}\Gamma_{1}T_{1} \frac{ds_{1}}{dt} = c_{2}^{2} \frac{d\rho_{2}}{dt} + \rho_{2}\Gamma_{2}T_{2} \frac{ds_{2}}{dt}.$$
 (21)

Уравнения (19) и (21) образуют систему уравнений с двумя неизвестными $\frac{ds_1}{dt} \, \mathsf{u} \, \frac{ds_2}{dt}:$ $\begin{cases}
\frac{\alpha_1 \rho_1 \alpha_2 \rho_2}{\rho} T_1 \left(\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \right) \frac{ds_1}{dt} = Y_2 \left(c_2^2 \frac{d\rho_2}{dt} - c_1^2 \frac{d\rho_1}{dt} \right) - \rho_2 \Gamma_2 \left(h_1 - h_2 \right) \dot{Y_1},$ $\frac{\alpha_1 \rho_1 \alpha_2 \rho_2}{\rho} T_2 \left(\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\Gamma_2}{\alpha_2} \right) \frac{ds_2}{dt} = -Y_1 \left(c_2^2 \frac{d\rho_2}{dt} - c_1^2 \frac{d\rho_1}{dt} \right) - \rho_1 \Gamma_1 \left(h_1 - h_2 \right) \dot{Y_1}.$ (22)

Выражения для производных $\frac{d\rho_1}{dt}$ и $\frac{d\rho_2}{dt}$ можно получить из (15). Тогда система (22) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{1}\rho_{1}\alpha_{2}\rho_{2}}{\rho}T_{1}\left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}}+\frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}}\right)\frac{ds_{1}}{dt} = \\ =Y_{2}\left[\left(\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}}+\frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right)\frac{d\alpha_{1}}{dt}-\left(\rho_{2}c_{2}^{2}-\rho_{1}c_{1}^{2}\right)\operatorname{div}\vec{u}\right] - \\ -\rho Y_{2}\left(\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}}+\frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right)\dot{Y}_{1}-\rho_{2}\tilde{A}_{2}\left(h_{1}-h_{2}\right)\dot{Y}_{1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{1}\rho_{1}\alpha_{2}\rho_{2}}{\rho}T_{2}\left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}}+\frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}}\right)\frac{ds_{2}}{dt} = \\ =-Y_{1}\left[\left(\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}}+\frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right)\frac{d\alpha_{1}}{dt}-\left(\rho_{2}c_{2}^{2}-\rho_{1}c_{1}^{2}\right)\operatorname{div}\vec{u}\right] + \\ +\rho Y_{1}\left(\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}}+\frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right)\dot{Y}_{1}-\rho_{1}\tilde{A}_{1}\left(h_{1}-h_{2}\right)\dot{Y}_{1}. \end{cases}$$

$$(23)$$

Выражая производную $\frac{d\alpha_1}{dt}$ из уравнения (16), можно привести систему (23) с учетом (2) к виду

$$\begin{cases} Y_{1} \frac{ds_{1}}{dt} = \frac{H(T_{2} - T_{1})}{\rho T_{1}} - \frac{\dot{Y}_{1}(h_{1} - h_{2})}{\frac{\tilde{A}_{1}T_{1}}{\alpha_{1}} \left(\frac{\alpha_{1}}{\tilde{A}_{1}} + \frac{\alpha_{2}}{\tilde{A}_{2}}\right)} + \\ + \frac{\dot{Y}_{1}}{T_{1} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}}\right)} \left[\frac{\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}{\rho_{I}} - \left(\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right) \right], \\ Y_{2} \frac{ds_{2}}{dt} = \frac{H(T_{2} - T_{1})}{\rho T_{2}} - \frac{\dot{Y}_{1}(h_{1} - h_{2})}{\frac{\tilde{A}_{2}T_{2}}{\alpha_{2}} \left(\frac{\alpha_{1}}{\tilde{A}_{1}} + \frac{\alpha_{2}}{\tilde{A}_{2}}\right)} + \\ + \frac{\dot{Y}_{1}}{T_{2} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}}\right)} \left[- \frac{\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}{\rho_{I}} + \left(\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}\right) \right]. \end{cases}$$
(24)

Таким образом, производные $\frac{ds_1}{dt}$ и $\frac{ds_2}{dt}$ являются функцией теплообмена, массообмена и интерфейсной плотности ρ_1 . Третий член в (24) связан с процессом релаксации давления при массообмене. Этот изоэнтропический процесс сопровождается испусканием акустических волн малой амплитуды [2]. В предположении изоэнтропии релаксации давления при испарении вклад третьего члена из (24) в изменение энтропии становится нулевым. Это позволяет получить выражение для интерфейсной плотности:

$$\rho_{I} = \frac{\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}{\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}.$$
(25)

Теперь окончательный вид двухфазной модели из пяти уравнений будет иметь вид

Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_{1} = \frac{\alpha_{1} \alpha_{2} \left(\rho_{2} c_{2}^{2} - \rho_{1} c_{1}^{2} \right)}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \times \operatorname{div} \vec{u} + \\ + \frac{\alpha_{1} \alpha_{2}}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2} \right)} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}} \right) Q_{1} + \frac{\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}{\frac{\rho_{1} c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{\rho_{2} c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}} \rho \dot{Y}_{1}, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u} \right) = \rho \dot{Y}_{1}, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u} \right) = -\rho \dot{Y}_{1}, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{u} \otimes \vec{u} \right) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{u} \left(\rho E + p \right) \right) = 0, \end{cases}$$

$$(26)$$

где давление двухфазной смеси определяется из следующего уравнения состояния:

$$p(\rho, e, \alpha_1, \alpha_2, Y_1, Y_2) = \frac{\rho(e - Y_1 q_1 - Y q_2) - \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}}.$$

Записывая второй закон термодинамики для двухфазной среды

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \vec{u}) \ge 0,$$

где

$$s = Y_1 s_1 + Y_2 s_2$$
,

и используя систему (24), можно получить:

$$\frac{H(T_2 - T_1)^2}{\rho} + (\overline{g}_2 - \overline{g}_1) \frac{\frac{\Gamma_1 T_1}{\alpha_1} + \frac{\Gamma_2 T_2}{\alpha_2}}{\frac{\Gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\Gamma_2}{\alpha_2}} \dot{Y}_1 \ge 0,$$
(27)

где

$$\overline{g}_{k} = h_{k} - \frac{T_{1}T_{2}\left(\frac{\Gamma_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\Gamma_{2}}{\alpha_{2}}\right)}{\frac{\Gamma_{1}T_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\Gamma_{2}T_{2}}{\alpha_{2}}}s_{k}$$

— эффективная энергия Гиббса фазы k.

Видно, что выполнение второго закона термодинамики обеспечивается в предположении, что

$$\dot{Y}_1 = \nu \left(\overline{g}_2 - \overline{g}_1 \right), \tag{28}$$

где v — положительный параметр, определяющий скорость перехода двухфазной системы в равновесное состояние при релаксации.

Явно оценить величины H из (2) и v из (28), контролирующие процессы теплообмена и массообмена, довольно трудно. Вместо этого предполагается использовать процедуру мгновенной релаксации температур и энергий Гиббса только в выбранных областях, а именно вблизи межфазовых интерфейсов. Вдали от этих интерфейсов величины H и v полагаются равными нулю:

$$H, v = \begin{cases} +\infty, \text{ если } \varepsilon \le \alpha_1 \le 1 - \varepsilon, \\ 0 \text{ в иных случаях.} \end{cases}$$
(29)

4. Численный метод

Численный метод решения системы уравнений (26), описывающей двухфазную сжимаемую среду в присутствии теплообмена и массообмена, состоит из двух последовательных шагов. На первом шаге решается гиперболическая часть системы (26) без учета процессов теплообмена и массообмена. В результате после первого шага состояние двухфазной системы может быть неравновесным. Затем на втором шаге вблизи интерфейсной границы раздела фаз моделируются процессы тепловой и химической релаксации. Интерфейсная граница раздела фаз определяется из анализа профиля объемной доли.

4.1. Гиперболический солвер

Гиперболическая часть системы уравнений (26) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_{1} = \frac{\alpha_{1} \alpha_{2} \left(\rho_{2} c_{2}^{2} - \rho_{1} c_{1}^{2}\right)}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2}\right)} \times \operatorname{div} \vec{u}, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}\right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}\right) = 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}\right) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{u} \left(\rho E + p\right)\right) = 0. \end{cases}$$
(30)

Основные проблемы, возникающие при численном решении системы (30), связаны с неконсервативной формой уравнения для объемной доли. Первая проблема состоит в том, что классические соотношения Рэнкина—Гюгонио на фронте ударной волны оказываются неприменимыми для римановского солвера при решении системы (30). Чтобы решить эту проблему, в работе [11] были получены соотношения, которые связывают параметры находящейся в механическом равновесии двухфазной среды до и после фронта ударной волны:

$$\begin{cases} Y_{k} = Y_{k}^{0}, \\ p - p_{0} + m^{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \quad m = \rho(u - \sigma) = \rho_{0} \left(u_{0} - \sigma\right), \\ u - u_{0} \pm m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ e_{k} - e_{k}^{0} + \frac{p + p_{0}}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \end{cases}$$
(31)

где $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$; $\rho_0 = (\alpha_1 \rho_1)_0 + (\alpha_2 \rho_2)_0$; k = 1, 2, а нижний индекс «О» соответствует состоянию перед ударной волной.

Соотношения (31) обеспечивают выполнение законов сохранения для двухфазной смеси. В предельном однофазовом случае эти соотношения

совпадают с классическими связями Рэнкина—Гюгонио. Также они обеспечивают сохранения положительности объемной доли и являются симметричными относительно фаз. Кроме того, расчеты, выполненные с применением соотношений (31), оказываются в полном согласии с экспериментальными данными [11].

В настоящей работе для расчетов двухфазных сжимаемых потоков использовался римановский солвер в приближении двух ударных волн [15]. Для уравнения состояния вида (12) соотношения (31) можно переписать в виде

$$\begin{cases} Y_{k} = Y_{k}^{0}, \\ p - p_{0} + m^{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ u - u_{0} \pm m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ \rho_{k} = \rho_{k}^{0} \frac{(\gamma_{k} + 1)(p + \pi_{k}) + (\gamma_{k} - 1)(p^{0} + \pi_{k})}{(\gamma_{k} - 1)(p + \pi_{k}) + (\gamma_{k} + 1)(p^{0} + \pi_{k})}. \end{cases}$$
(32)

Величина неизвестного давления находится из решения нелинейного уравнения $f(p^*) = 0$ методом Ньютона, где

$$f(p^{*}) = u_{R} - u_{L} + \frac{p^{*} - p_{R}}{m_{R}} + \frac{p^{*} - p_{L}}{m_{L}} =$$

$$= u_{R} - u_{L} + (p^{*} - p_{R}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{R}}{(\rho_{1})_{R}(p^{*}(\gamma_{1}+1) + p_{R}(\gamma_{1}-1) + 2\pi_{1}\gamma_{1})} + \frac{(Y_{2})_{R}}{(\rho_{2})_{R}(p^{*}(\gamma_{2}+1) + p_{R}(\gamma_{2}-1) + 2\pi_{2}\gamma_{2})}\right)^{1/2} +$$

$$+ (p^{*} - p_{L}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{L}}{(\rho_{1})_{L}(p^{*}(\gamma_{1}+1) + p_{L}(\gamma_{1}-1) + 2\pi_{1}\gamma_{1})} + \frac{(Y_{2})_{L}}{(\rho_{2})_{L}(p^{*}(\gamma_{2}+1) + p_{L}(\gamma_{2}-1) + 2\pi_{2}\gamma_{2})}\right)^{1/2},$$
(33)

нижние индексы « R » и « L » соответствуют начальным значениям газодинамических параметров фаз справа и слева от разрыва при постановке задачи Римана.

После вычисления величины давления p^{*} значение скорости определяется из соотношения

$$u^{*} = u_{L} - (p^{*} - p_{L}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{L}}{(\rho_{1})_{L} (p^{*}(\gamma_{1} + 1) + p_{L}(\gamma_{1} - 1) + 2\pi_{1}\gamma_{1})} + \frac{(Y_{2})_{L}}{(\rho_{2})_{L} (p^{*}(\gamma_{2} + 1) + p_{L}(\gamma_{2} - 1) + 2\pi_{2}\gamma_{2})} \right)^{1/2}.$$
(34)

Вторая проблема, возникающая при численном решении системы (30), связана с усреднением величины объемной доли в ячейке расчетной сетки, так как усреднение имеет смысл только для консервативных переменных. Для решения этой проблемы в [12] был предложен лагранжев подход с применением метода релаксации газодинамических переменных. На рис. 1 показано положение границ лагранжевой ячейки на постоянной сетке в общем случае. Смещение границ рассчитывается с использованием описанного приближенного римановского солвера.



Рис. 1. Смещение границ лагранжевых ячеек внутри фиксированной *i*-й ячейки на эйлеровой сетке

Значение давления в *i*-й ячейке находится с использованием соотношения насыщения

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \left(\alpha_k^0 \right)_j = 1, \tag{35}$$

где $\beta_j = \frac{L_j}{\Delta x_i}$; Δx_i — размер фиксированной *i*-й ячейки на эйлеровой

расчетной сетке; $L_1 = \max\left(0, u_{i-1/2}^*\right) \Delta t$, $L_3 = \min\left(0, u_{i+1/2}^*\right) \Delta t$, $L_2 = \Delta x_i - L_1 - L_2$.

Суммирование в (35) осуществляется по всем лагранжевым ячейкам, границы которых лежат внутри фиксированной *i* -й ячейки на эйлеровой сетке.

Выражение (35) может быть записано в виде

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} {\left(m_k^0\right)}_j \left[\frac{1}{\rho_k\left(p^*\right)}\right]_j = 1,$$
(36)

где $(m_k^0)_j = \beta_j (\alpha_k^0)_j (\rho_k^0)_j$ — удельная масса фазы k в областях I, II или III (см. рис. 1).

Величины плотности каждой и фаз в различных областях *i*-й ячейки определяются из следующих релаксационных соотношений [12]:

$$\left(e_{k}^{*}\right)_{j}-\left(e_{k}^{0}\right)_{j}+p^{*}\left(\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}}-\frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}}\right)=\frac{\left(u^{*}-u_{j}^{0}\right)^{2}}{2}.$$
(37)

Для уравнения состояния вида (12) выражение (37) может быть записано в виде

$$\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}} = \frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}} \frac{p_{j}^{0} + \gamma_{k}\pi_{k} + p^{*}\left(\gamma_{k} - 1\right)}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}} + \frac{\left(u^{*} - u_{j}^{0}\right)^{2}}{2} \frac{\gamma_{k} - 1}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}}.$$
 (38)

Так как после релаксации в *i*-й ячейке содержится двухфазная среда, состояние которой описывается одним значением скорости u^* , то, полагая в (38) $u_i^* = u^*$, легко видеть, что

$$u^{*} = \frac{\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j} \times u_{j}^{0}}{\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j}}.$$
(39)

Закон сохранения полной энергии двухфазной смеси может быть записан следующим образом:

$$\rho^{*}E^{*} = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{*})_{j} \times (\rho_{k}^{*})_{j} \times \left[\frac{(u^{*})^{2}}{2} + \frac{p^{*} + \gamma_{k}\pi_{k}}{(\rho_{k}^{*})_{j}(\gamma_{k}-1)} + q_{k}\right] =$$

$$= \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j} \times \left[\frac{(u_{j}^{0})^{2}}{2} + \frac{(p_{k}^{0})_{j} + \gamma_{k}\pi_{k}}{(\rho_{k}^{0})_{j}(\gamma_{k}-1)} + q_{k}\right].$$
(40)

Значение давления в *i*-й ячейке после релаксации находится с использованием соотношения насыщения

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^0\right)_j = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^*\right)_j = 1,$$
(41)

где $\beta_j = \frac{L_j}{\Delta x_i}$; Δx_i — размер фиксированной i-й ячейки на эйлеровой расчетной сетке; $L_1 = \max\left(0, u_{i-1/2}^*\right)\Delta t$; $L_3 = \min\left(0, u_{i+1/2}^*\right)\Delta t$; $L_2 = \Delta x_i - L_1 - L_2$.

Выражение (41) может быть записано в виде

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \left(m_k^*\right)_j \left[\frac{1}{\rho_k^*\left(p^*\right)}\right]_j = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \left(m_k^0\right)_j \left[\frac{1}{\rho_k^*\left(p^*\right)}\right]_j = 1,$$
(42)

где $(m_k^*)_j = \beta_j \times (\alpha_k^*)_j \times (\rho_k^*)_j = (m_k^0)_j = \beta_j \times (\alpha_k^0)_j \times (\rho_k^0)_j$ — удельная масса фазы k в областях I, II или III (см. рис. 1), которая постоянна в ходе

Величины плотности каждой из фаз в различных областях *i*-й ячейки определяются из следующих релаксационных соотношений [12]:

релаксации.

$$\left(e_{k}^{*}\right)_{j}-\left(e_{k}^{0}\right)_{j}+p^{*}\left(\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}}-\frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}}\right)=\frac{\left(u^{*}-u_{j}^{0}\right)^{2}}{2}.$$
(43)

Для уравнения состояния вида (12) выражение (43) может быть записано в виде

$$\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}} = \frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}} \frac{p_{j}^{0} + \gamma_{k}\pi_{k} + p^{*}\left(\gamma_{k} - 1\right)}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}} + \frac{\left(u^{*} - u_{j}^{0}\right)^{2}}{2} \frac{\gamma_{k} - 1}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}}.$$
 (44)

Подставляя значения плотности из (44) в (42), можно получить уравнение для вычисления величины давления p^* :

$$F(p^{*}) = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} (m_{k}^{0})_{j} \times \left(\frac{1}{(\rho_{k}^{0})_{j}} \frac{p_{j}^{0} + \gamma_{k}\pi_{k} + p^{*}(\gamma_{k} - 1)}{(p^{*} + \pi_{k})\gamma_{k}} + \frac{(u^{*} - u_{j}^{0})^{2}}{2} \frac{\gamma_{k} - 1}{(p^{*} + \pi_{k})\gamma_{k}} \right) - 1 = 0,$$

$$(45)$$

где скорость u^* находится из (39).

Решение уравнения (45) может быть найдено с использованием метода Ньютона.

Значение объемной доли после релаксации вычисляется из уравнения состояния двухфазной смеси (27):

Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\alpha_{1}^{*} = \frac{\rho^{*}e^{*} - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{*}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{*}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}} =$$

$$= \frac{\rho^{*}e^{*} - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{0}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{0}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}} =$$

$$= \frac{\left[\rho^{*}E^{*} - \rho^{*}\frac{\left(u^{*}\right)^{2}}{2}\right] - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{0}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{0}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{2} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}},$$

$$(46)$$

где величина $(\alpha_k \rho_k)^* = (\alpha_k \rho_k)^0$, k = 1, 2 определяется из (37); значение $\rho^* E^*$ находится с использованием (40); параметр ρ^* вычисляется из (36).

Теперь величины плотностей ρ_k^* каждой из фаз после релаксации в *i*-й ячейке фиксированной расчетной сетки могут быть определены с использованием выражения (37). Таким образом, соотношения (39), (45), (46) и (37) позволяют определить скорость, давление, объемную долю и плотность каждого из компонентов двухфазной среды соответственно.

4.2. Численное моделирование тепловой и химической релаксации

После решения гиперболической части системы (26) состояние двухфазной среды является лишь механически равновесным. Каждая из фаз имеет собственную температуру и энергию Гиббса. При наличии теплообмена и массообмена на интерфейсной границе раздела фаз необходимо выполнение условий равенства температур и химических потенциалов каждой из фаз. Для обеспечения выполнения этих условий применяется следующий метод.

Положение межфазного интерфейса определялось с применением анализа профиля объемной доли. При величине объемной доли одной из фаз в данной ячейке расчетной сетки не более 10^{-8} предполагалось, что данная область целиком занята другой фазой. Положение межфазового интерфейса соответствовало месту, где величина объемной доли находилась в диапазоне

$$\varepsilon_2 \le \alpha \le 1 - \varepsilon_2, \tag{47}$$

где $\epsilon_2 = 10^{-6}$.

Так как процессы испарения рассматриваются только на межфазовом интерфейсе, такой алгоритм определения положения этого интерфейса обеспечивает возможность появления областей с нестабильным состоянием при значениях объемной доли в диапазонах $\alpha < \varepsilon_2$ и $\alpha > 1 - \varepsilon_2$. Если взять близкие значения параметров ε_1 и ε_2 , то процесс испарения будет происходить не только вблизи интерфейсной границы раздела фаз.

Главным условием появления нестабильных состояний в двухфазной среде является превышение температуры насыщения при данном давлении:

$$T_k > T_{\text{haching}}(p). \tag{48}$$

В случае реализации условий (47) и (48) для расчета массообмена и теплообмена в двухфазной среде на интерфейсной границе выполняется численное интегрирование членов-источников в правой части системы уравнений (26):

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} = \frac{\alpha_{1}\alpha_{2}}{\left(\alpha_{2}\rho_{1}c_{1}^{2} + \alpha_{1}\rho_{2}c_{2}^{2}\right)} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\tilde{A}_{2}}{\alpha_{2}}\right) Q_{1} + \frac{\frac{c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}}{\frac{\rho_{1}c_{1}^{2}}{\alpha_{1}} + \frac{\rho_{2}c_{2}^{2}}{\alpha_{2}}} \rho \dot{Y}_{1} = S_{\alpha_{1}}, \\ \frac{\partial \alpha_{1}\rho_{1}}{\partial t} = \rho \dot{Y}_{1} = S_{\gamma_{1}}, \\ \frac{\partial \alpha_{1}\rho_{1}}{\partial t} = -\rho \dot{Y}_{1}, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} = 0. \end{cases}$$
(49)

Неизвестные величины Q_1 из (2) и $\dot{Y_1}$ из (29) определяются в предположении мгновенной релаксации (30). Это означает, что при численном интегрировании в конце каждого временного шага достигается равенство температур и химических потенциалов каждой из фаз. Подчеркнем еще раз, что такое равновесное состояние реализуется только вблизи интерфейсной границы раздела фаз, вдали от этого интерфейса двухфазная

среда может находиться в неравновесном состоянии по температуре и химическому потенциалу.

Используя (49) для уравнения состояния (14), можно получить следующие соотношения для временной эволюции разности температур и энергий Гиббса из (28) в двухфазной среде [10]:

$$\begin{cases} \frac{\left(\Delta T\right)^{n+1} - \left(\Delta T\right)^{n}}{\Delta t} = A^{n}Q_{1}^{n} + B^{'n}\dot{Y}_{1}^{n}, \\ \frac{\left(\Delta g\right)^{n+1} - \left(\Delta g\right)^{n}}{\Delta t} = A^{'n}Q_{1}^{n} + B^{'n}\dot{Y}_{1}^{n}, \end{cases}$$
(50)

где

$$\begin{split} A &= -\left(C_{1} - C_{2}\right)\rho c^{2} \left(\frac{\Gamma_{1}}{\rho_{1}c_{1}^{2}} - \frac{\Gamma_{2}}{\rho_{2}c_{2}^{2}}\right) + \frac{1}{\left(C_{v}\right)_{1}\gamma_{1}\alpha_{1}\rho_{1}} + \frac{1}{\left(C_{v}\right)_{2}\gamma_{2}\alpha_{2}\rho_{2}};\\ B &= -\left(C_{1} - C_{2}\right)\rho \left[\left(\frac{\rho c^{2}}{\rho_{1}} - \tilde{A}h_{1}\right) - \left(\frac{\rho c^{2}}{\rho_{2}} - \tilde{A}h_{2}\right)\right] - \\ &-\rho \tilde{A}(h_{1} - h_{2}) \left[\frac{1}{\left(C_{v}\right)_{1}\gamma_{1}\tilde{A}_{1}\rho_{1}} - \frac{1}{\left(C_{v}\right)_{2}\gamma_{2}\tilde{A}_{2}\rho_{2}}\right];\\ A' &= \left(D_{1}C_{1} - D_{2}C_{2}\right)\rho c^{2} \left(\frac{\tilde{A}_{1}}{\rho_{1}c_{1}^{2}} - \frac{\tilde{A}_{2}}{\rho_{2}c_{2}^{2}}\right) - \left[1 + \frac{D_{1}}{\left(C_{v}\right)_{1}\gamma_{1}}\right]\frac{1}{\alpha_{1}\rho_{1}} - \\ &- \left[1 + \frac{D_{2}}{\left(C_{v}\right)_{2}\gamma_{2}}\right]\frac{1}{\alpha_{2}\rho_{2}};\\ B' &= \left(D_{1}C_{1} - D_{2}C_{2}\right)\rho \left[\left(\frac{\rho c^{2}}{\rho_{1}} - \tilde{A}h_{1}\right) - \left(\frac{\rho c^{2}}{\rho_{2}} - \tilde{A}h_{2}\right)\right] + \\ &+ \rho \tilde{A}(h_{1} - h_{2})\left\{\left[1 + \frac{D_{1}}{\left(C_{v}\right)_{1}\gamma_{1}}\right]\frac{1}{\tilde{A}_{1}\rho_{1}} + \left[1 + \frac{D_{2}}{\left(C_{v}\right)_{2}\gamma_{2}}\right]\frac{1}{\tilde{A}_{2}\rho_{2}}\right\};\\ C_{k} &= \frac{\left(1 - \gamma_{k}T_{k}\right)}{\gamma_{k}\left(\rho + \pi_{k}\right)}, \quad k = 1, 2;\\ D_{k} &= \frac{q_{k} - g_{k}}{T_{k}}, \quad k = 1, 2; \end{split}$$

$$\Gamma_{k} = \frac{1}{\rho_{k}} \left(\frac{\partial p}{\partial e_{k}} \right)_{\rho_{k}} = \gamma_{k} - 1, \quad k = 1, 2;$$

$$\Gamma = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_{\rho} = \frac{1}{\frac{\alpha_{1}}{\gamma_{1} - 1} + \frac{\alpha_{2}}{\gamma_{2} - 1}};$$

$$c_{k}^{2} = \gamma_{k} \frac{p + \pi_{k}}{\rho_{k}}, \quad k = 1, 2;$$

$$c^{2} = \frac{1}{\rho \left(\frac{\alpha_{1}}{\rho_{1} c_{1}^{2}} + \frac{\alpha_{2}}{\rho_{2} c_{2}^{2}} \right)}.$$

Наиболее простой способ численной аппроксимации системы (50) для двух последовательных моментов времени t^n и t^{n+1} , соответствующих гидродинамическому шагу при численном решении системы (31), может быть записан в виде

$$\begin{cases} \frac{\left(\Delta T\right)^{n+1} - \left(\Delta T\right)^{n}}{\Delta t} = A^{n}Q_{1}^{n} + B^{n}\dot{Y}_{1}^{n}, \\ \frac{\left(\Delta g\right)^{n+1} - \left(\Delta g\right)^{n}}{\Delta t} = A^{\prime n}Q_{1}^{n} + B^{\prime n}\dot{Y}_{1}^{n}. \end{cases}$$
(51)

Значения переменных с верхним временным индексом «*n*» в (51) соответствуют величинам, полученным в результате решения гиперболической системы (31). Переменные в момент времени t^{n+1} соответствуют окончательным значениям, вычисленным как с учетом гидродинамических эффектов, так и с учетом теплообмена и массообмена. Так как в конце каждого временного шага состояние системы является равновесным: $(\Delta T)^{n+1} = 0$ и $(\Delta g)^{n+1} = 0$, явный вид параметров теплообмена и массообмена будет следующим:

$$\begin{cases} Q_{1} = -\frac{B'}{AB' - A'B} \frac{\left(\Delta T\right)^{n}}{\Delta t} + \frac{B}{AB' - A'B} \frac{\left(\Delta g\right)^{n}}{\Delta t}, \\ \dot{Y}_{1} = \frac{A'}{AB' - A'B} \frac{\left(\Delta T\right)^{n}}{\Delta t} + \frac{A}{AB' - A'B} \frac{\left(\Delta g\right)^{n}}{\Delta t}. \end{cases}$$
(52)

137

Выражения (52) позволяют вычислить значения величин S_{α_1} и S_{γ_1} в правой части системы (49). Однако такая оценка не обеспечивает положительность объемной и массовой долей, получаемых при численном интегрировании системы (49). Поэтому при вычислении величин S_{α_1} и S_{γ_1} вводятся специальные ограничители.

Ограничитель для параметра S_{α} :

$$S_{\max,\alpha_1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha_1}{\Delta t}, \text{ если } S_{\alpha_1} > 0, \\ -\frac{\alpha_1}{\Delta t} \text{ в иных случаях.} \end{cases}$$
(53)

Ограничитель для параметра S_{y} :

$$S_{\max,Y_{1}} = \begin{cases} \frac{\min(\alpha_{1}\rho_{1},\alpha_{2}\rho_{2})}{\Delta t}, \text{ если } S_{Y_{1}} > 0, \\ -\frac{\min(\alpha_{1}\rho_{1},\alpha_{2}\rho_{2})}{\Delta t} \text{ в иных случаях.} \end{cases}$$
(54)

Если $|S_{\max \alpha_{i}}| > |S_{\alpha_{i}}|$ и $|S_{\max Y_{i}}| > |S_{Y_{i}}|$, то численное интегрирование системы (49) с оценками (52) может быть выполнено с использованием гидродинамического временного шага $\Delta t = t^{n+1} - t^{n}$. В противном случае, если $|S_{\max \alpha_{i}}| \le |S_{\alpha_{i}}|$, то вычисляется величина отношения $R_{\alpha_{i}} = \frac{S_{\max \alpha_{i}}}{S_{\alpha_{i}}}$, и численное интегрирование системы (49) на временном шаге Δt выполняется с временными шагами $\Delta t_{xmm} = R_{\alpha_{i}} \frac{\Delta t}{2}$. Если $|S_{\max Y_{i}}| \le |S_{Y_{i}}|$, то вычисляется величина отношения $R_{\alpha_{i}} = \frac{S_{\max \alpha_{i}}}{S_{\alpha_{i}}}$, и численное интегрирование системы (49) на временном шаге Δt выполняется с временными шагами $\Delta t_{xmm} = R_{\alpha_{i}} \frac{\Delta t}{2}$. Если $|S_{\max Y_{i}}| \le |S_{Y_{i}}|$, то вычисляется мы (49) выполняется с временными шагами $\Delta t_{xmm} = R_{Y_{i}} \frac{\Delta t}{2}$. Если $|S_{\max \alpha_{i}}| \le |S_{\alpha_{i}}|$ и $|S_{\max Y_{i}}| \le |S_{Y_{i}}|$, то $\Delta t_{\delta e i} = \min(R_{\alpha_{i}}, R_{Y_{i}}) \frac{\Delta t}{2}$.

5. Результаты

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных с использованием описанной модели, для распада разрыва в ударной трубе и кавитации с учетом массообмена и без него.

5.1. Распад разрыва в додекане

Левая часть метровой трубы (x < 0,75 м) заполнена жидким додеканом с плотностью 500 кг/м³ при высоком давлении 10⁸ Па. Правая часть трубы (x > 0,75 м) содержит газообразный додекан с плотностью 2 кг/м³ при атмосферном давлении. Для согласованности численной модели каждая фаза в начальный момент времени содержит малую долю (10^{-8}) другой фазы. На рис. 2 представлены результаты расчета для момента времени 473 мкс. Расчет был выполнен на сетке из 1000 ячеек для значения числа Куранта 0,8. Показаны зависимости для давления (a), скорости (b), плотности двухфазной смеси (b) и объемной доли газообразного додекана (z). На каждом графике представлены два профиля. Незакрашенные символы соответствуют расчету, когда массообмен отсутствует. Закрашенные символы представляют результаты, полученные в присутствии массообмена.

При отсутствии массообмена налево через жидкую фазу распространяется волна разрежения, направо движутся контактный разрыв и ударная волна. При учете массообмена после прохождения волны разрежения в жидкой фазе возникает нестабильное (перегретое) состояние. Это состояние находится вблизи равновесной кривой насыщения, так как процессы тепловой и химической релаксации, используемые в описанной модели массообмена, являются очень быстрыми. В результате релаксации перегретая жидкость превращается в термодинамически равновесную двухфазную среду, обладающую высокой скоростью.

Это приводит к возникновению дополнительной волна испарения, которая расположена между волной разрежения и контактным разрывом. Волна испарения распространяется по области, в которой расположена перегретая жидкая фаза. В данном расчете волна испарения соответствует обычной волне разрежения в двухфазной термодинамически равновесной системе.



Рис. 2. Распад разрыва в додекане. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и массовой доли газовой фазы (*г*)



5.2. Распад разрыва в воде

Метровая труба заполнена водой с плотностью 1150 кг/м³ при атмосферном давлении. Объемная примесь водяного пара с плотностью 1 кг/м³ составляет величину 10^{-2} . Скорость двухфазной среды в левой части трубы (x < 0,5 м) равна -2 м/с, а скорость в правой части трубы (x > 0,5 м) составляет величину 2 м/с.

В данном расчете явный межфазовый интерфейс изначально отсутствует, кавитация происходит в двухфазной смеси с малой долей газовой фазы. Критерием начала процессов испарения является только условие (48). На рис. З представлены результаты расчета на сетке из 1000 ячеек для момента времени 3200 мс при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили давления (а), скорости (б), плотности двухфазной смеси (в), а также профили объемной доли газовой фазы (г). На каждом графике представлены зависимости, полученные с использованием описанной в данной работе модели с учетом и без учета массообмена. Из рис. З видно распространение влево и вправо двух волн разрежения. В центральной области увеличивается объемная доля газовой фазы, что приводит к динамическому появлению интерфейсной границы раздела фаз. При отсутствии массообмена рост объемной доли связан с механическим расширением газа, который изначально содержится в воде в малых пропорциях. Таким образом, при отсутствии массообмена рост газовых пузырьков при кавитации обусловлен только процессом механической релаксации. В случае учета процессов массообмена после прохождения волн разрежения жидкая фаза оказывается в нестабильном состоянии. Затем процессы испарения приводят к образованию дополнительного количества газовой фазы и значительным изменениям величин всех газодинамических параметров по сравнению со значениями, полученными при вычислениях без учета массообмена. Данный метод расчета кавитации с учетом процессов испарения в двухфазной среде приводит к конфигурации решения с двумя дополнительными медленными волнами разрежения, которые распространяются в термодинамически равновесной двухфазной среде [10].



Рис. 3. Кавитация в воде. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и массовой доли газовой фазы (*г*). Видно влияние процессов массообмена на временную эволюцию всех профилей газодинамических переменных



Рис. 3 (окончание)

6. Заключение

Описанная модель позволяет проводить расчеты процессов испарения в сжимаемых двухфазных кавитирующих потоках в присутствии явного межфазного интерфейса, а также рассчитывать динамическое формирование такого интерфейса. Эта модель является термодинамически неравновесной. Переход к равновесному состоянию при испарении осуществляется с использованием процедуры мгновенной тепловой и химической релаксации. В областях испарения формируются волны разрежения, которые разделяют
равновесное и нестабильное состояние двухфазной среды. Появление таких волн обусловлено использованием мгновенной релаксационной процедуры.

Применение данной модели для двумерных расчетов осуществляется с использованием метода расщепления по направлениям.

Литература

- Kapila A., Menikoff R., Bdzil J. et al. Two-phase modeling of DDT in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 3002—3024.
- Saurel R., Petitpas F., Abgrall R. Modelling phase transition in metastable liquids: application to cavitating and flashingflows // J. Fluid Mech. — 2008. — Vol. 607. — P. 313—350.
- 3. *Menikoff R., Plohr B. J.* The Riemann problem for fluid flow of real materials // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 61. P. 75—130.
- Saurel R., Cocchi J. P., Bulter P. B. A numerical study of cavitation in the wake of a hypervelocity underwater projectile // J. Propulsion Power. — 1999. — Vol. 15. — P. 513—522.
- Faucher E., Herard J. M., Barret M., Toulemonde C. Computation of flashing flows in variable cross section ducts // Intl. J. Comput. Fluid. Dyn. — 2000. — Vol. 13. — P. 365—391.
- Delhaye J. M., Boure J. A. General equations and two-phase flow modeling // Handbook of Multiphase Systems / Ed. G. Hestroni. — [S. 1.]: Hemisphere, 1982.
- Baer M. R., Nunziato J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Intl. J. Multiphase Flows. — 1986. — Vol. 12. — P. 861—889.
- Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150. — P. 425—467.
- 9. *Saurel R., Le Metayer O.* A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation // J. Fluid Mech. 2001. Vol. 431. P. 239—271.
- Le Metayer O., Massoni J., Saurel R. Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers J. Comp. Phys. // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 205. — P. 576—610.
- Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // Shock Waves / Spinger. — 2007. — Vol. 16. — P. 209—232.
- 12. Petitpas F., Franquet E., Saurel R., Le Metayer O. A relaxation-projection method for compressible flows. Pt. 2: Artificial heat exchanges for mul-

tiphase shocks // J. Comput. Phys. — 2007. — Vol. 225. — P. 2214—2248.

- Saurel R. Gavrilyuk S., Renaud F. A multiphase model with internal degrees of freedom: application to shock-bubble interaction // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 495. P. 283—321.
- Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. Vol. 186. P. 361—396.
- 15. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluids dynamics. Berlin: Springer, 1997.

Численный метод для расчета двухфазных течений с использованием механически неравновесной по давлению двухфазной модели

1. Введение

Механически равновесная двухфазная модель из пяти уравнений [1] позволяет рассчитывать распространение сильных ударных волн и волн разрежения в двухфазных и двухкомпонентных сжимаемых средах, а также хорошо разрешать присутствующие в газодинамических потоках межфазные интерфейсы. Однако при численной аппроксимации этой модели возникает ряд проблем [2]. Одна из них связана с немонотонным поведением скорости звука двухфазной смеси в зависимости от объемной доли, что может привести к значительным ошибкам при расчетах прохождении волн через интерфейсную границу раздела фаз. Другая проблема — неконсервативная форма уравнения для объемной доли. Даже с использованием соотношений на фронте ударной волны, полученных специально для данной модели в [3], не всегда удается добиться совпадения численного и аналитического решений, так как усреднение неконсервативных переменных не имеет физического смысла. В [2] эта трудность была преодолена путем использования алгоритма релаксации вместо процедуры усреднения.

Равновесная двухфазная модель из пяти уравнений была получена в асимптотическом пределе механически неравновесной двухфазной модели из семи уравнений [4]. При этом неконсервативные члены в уравнении для объемной доли появляются из условия равенства давлений каждой из фаз. В настоящей работе для численного решения модели из пяти уравнений используется неравновесная по давлению гиперболическая модель из шести уравнений [5]. Она содержит два уравнения, выражающие закон сохранения массы каждой из фаз, одно уравнение адвекции для объемной доли, одно уравнение для закона сохранения импульса двухфазной смеси, а также два неконсервативных уравнения для внутренней энергии каждой из фаз с релаксационными членами в правой части. Чтобы обеспечить корректный расчет ударных волн в однофазном пределе, вводится дополнительное уравнение, выражающее закон сохранения полной энергии двухфазной смеси. В модели из шести уравнений зависимость скорости звука от объемной доли оказывается монотонной и равной «вмороженной» скорости звука двухфазной смеси. Кажущееся усложнение модели на самом деле приводит к значительному упрощению численного алгоритма. На первом шаге решается гиперболическая часть двухфазной модели из шести уравнений без релаксационных членов в правой части. На этом шаге объемная доля остается постоянной при прохождении волны разрежения, что позволяет решить задачу Римана с применением быстрого и простого приближенного римановского солвера. На втором шаге учитывается влияние релаксационных членов с применением метода Ньютона, который обеспечивает положительность объемной доли.

В разделе 2 описываются равновесная и неравновесная по давлению двухфазные модели. В разделе 3 приводится описание численного решения гиперболической части системы из шести уравнений, описывающих двухфазную среду, а также описание численного метода для процедуры мгновенной релаксации давлений в неравновесной двухфазной среде. В разделе 4 представлены результаты расчета одномерных задач с использованием описанного численного метода, а также приведено сравнение результатов расчета с точным решением и с результатами, полученными с использованием двухфазной модели из пяти уравнений.

2. Механически равновесная и односкоростная неравновесная по давлению двухфазные модели

В основе рассматриваемых двухфазных моделей лежит механически неравновесная модель из семи уравнений [4]. Механически равновесная модель из пяти уравнений получается из неравновесной в асимптотическом пределе мгновенной релаксации скоростей и давлений в двухфазной среде [6].

2.1. Двухфазная модель из пяти уравнений

Механически равновесная двухфазная модель из пяти уравнений в одномерном случае имеет вид [1]: Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \left(\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2\right)}{\left(\alpha_2 \rho_1 c_1^2 + \alpha_1 \rho_2 c_2^2\right)} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_1 \rho_1 u\right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_2 \rho_2 u\right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u^2 + p\right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \left(\left(\rho E + p\right) u\right)}{\partial x} = 0, \end{cases}$$
(1)

где α_k , ρ_k — объемная доля и плотность k-го компонента двухфазной среды, k = 1, 2; u, p, E — скорость, давление и полная энергия на единицу массы двухфазной среды; $E = e + \frac{u^2}{2}$, где e — внутренняя энергия двухфазной среды на единицу массы; $e = Y_1 e_1 (\rho_1, p) + Y_2 e_2 (\rho_2, p)$, где $Y_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho}$ — массовая доля k-й фазы; $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ — плотность двухфазной среды.

Для уравнения состояния каждой из фаз вида

$$p = (\gamma_k - 1)\rho_k e_k - \gamma_k \pi_k, \qquad (2)$$

где γ_k , π_k — параметры уравнения состояния,

уравнение состояния двухфазной среды будет иметь вид

$$p(\rho, e, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\rho e - \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}}.$$
(3)

В работе [3] были получены соотношения, которые связывают параметры находящейся в механическом равновесии двухфазной среды, которая описывается системой уравнений (1), до и после фронта ударной волны:

$$\begin{cases} Y_{k} = Y_{k}^{0}, \\ p - p_{0} + m^{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \quad m = \rho(u - \sigma) = \rho_{0}(u_{0} - \sigma), \\ u - u_{0} \pm m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ e_{k} - e_{k}^{0} + \frac{p + p_{0}}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(4)$$

где σ — скорость ударной волны; нижний индекс «О» соответствует состоянию перед ударной волной.

Соотношения (4) были проверены на большом объеме экспериментальных данных для слабых и сильных волн. Во всех случаях было получено хорошее совпадение с экспериментальными зависимостями [3].

При численном решении системы уравнений (1) возникает ряд серьезных проблем. Даже используя соотношения (4) в римановском солвере при численном решении (1), не всегда удается получить сходимость численного решения к аналитическому. Это связано с неконсервативной формой уравнения для объемной доли: усреднение неконсервативных переменных не имеет физического смысла. В [2] при численном решении (1) вместо процедуры усреднения использовался алгоритм релаксации. Другой проблемой является сохранение положительности объемной доли и величины давления, особенно при релаксации, так как сжимаемость жидкой фазы крайне мала. Скорость звука в двухфазной смеси в данной модели является немонотонной функцией объемной доли:

$$\frac{1}{\rho c_w^2} = \frac{\alpha_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{\alpha_2}{\rho_2 c_2^2}.$$
 (5)

Такая немонотонность приводит к неправильному расчету прохождения волн через интерфейсную границу раздела фаз.

Чтобы избежать основных проблем, возникающих при численной аппроксимации двухфазной равновесной модели из пяти уравнений, используется неравновесная по давлению двухфазная модель из шести уравнений [5].

2.2. Двухфазная модель из шести уравнений

Механически неравновесная по давлению односкоростная двухфазная модель из шести уравнений получается из неравновесной двухфазной модели в асимптотическом пределе мгновенной релаксации скоростей в двухфазной среде [5]. Эта модель в одномерном случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial x} = \mu \left(p_{1} - p_{2} \right), \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_{1} \rho_{1} u \right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_{2} \rho_{2} u \right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u^{2} + \alpha_{1} p_{1} + \alpha_{2} p_{2} \right)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} e_{1}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_{1} \rho_{1} e_{1} u \right)}{\partial x} + \alpha_{1} \rho_{1} \frac{\partial u}{\partial x} = -p_{1} \mu \left(p_{1} - p_{2} \right), \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} e_{2}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\alpha_{2} \rho_{2} e_{2} u \right)}{\partial x} + \alpha_{2} \rho_{2} \frac{\partial u}{\partial x} = p_{1} \mu \left(p_{1} - p_{2} \right), \end{cases}$$
(6)

где величина интерфейсного давления p_I вычисляется в асимптотическом пределе от значения интерфейсного давления в неравновесной модели из семи уравнений:

$$p_{I} = \frac{\rho_{2}c_{2}p_{1} + \rho_{1}c_{1}p_{2}}{\rho_{1}c_{1} + \rho_{2}c_{2}},$$
(7)

 c_k — скорость звука в k-й фазе, k = 1, 2.

Скорость звука в двухфазной смеси в данной модели совпадает с «вмороженной» скоростью звука и является монотонной функцией объемной доли:

$$c_f^2 = Y_1 c_1^2 + Y_2 c_2^2.$$
(8)

Модель (6) является гиперболической со следующими значениями характеристических скоростей: $u + c_f$, u, $u - c_f$.

Используя уравнения для внутренней энергии каждой из фаз, а также уравнение для импульса двухфазной смеси, можно получить дополнительное уравнение для полной энергии:



Это уравнение применяется для коррекции ошибок, возникающих при численной аппроксимации двух неконсервативных уравнений для внутренних энергий в присутствии сильных волн.

Как уже отмечалось, использование соотношений (4), связывающих значения газодинамических параметров по обеим сторонам фронта ударной волны в равновесной модели из пяти уравнений, при численном решении системы (1) не гарантирует сходимости численного решения к аналитическому. Так как неравновесная по давлению модель из шести уравнений предназначена для численной аппроксимации системы (1), для решения гиперболической части системы (6) без релаксационных членов в правой части используются соотношения (4), дополненные условием непрерывности профиля объемной доли: $\alpha_1 = \alpha_1^0$.

3. Численный метод

Решение системы (6) состоит из двух шагов. На первом шаге решается гиперболическая часть двухфазной неравновесной по давлению модели из шести уравнений без релаксационных членов в правой части. На этом шаге объемная доля остается постоянной при прохождении волны разрежения, что позволяет решить задачу Римана с применением простого римановского солвера типа HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) [5]. На втором шаге учитывается влияние релаксационных членов с применением метода Ньютона, который обеспечивает положительность объемной доли. В конце численного алгоритма вводится поправка величины давления с использованием уравнения состояния двухфазной смеси (3).

3.1. Гиперболический солвер

При построении гиперболического солвера рассматривается задача Римана на границе расчетной ячейки, разделяющей состояния двухфазной среды слева (L) и справа (R). Скорости левой волны оценивается следующим образом:

$$S_{L} = \min(u_{L} - c_{L}, u_{R} - c_{R}) = \\= \min\left[u_{L} - (c_{1})_{L} (Y_{1})_{L} - (c_{2})_{L} (Y_{2})_{L}, u_{R} - (c_{1})_{R} (Y_{1})_{R} - (c_{2})_{R} (Y_{2})_{R}\right],$$
(10)

где

$$(c_k)_L = \sqrt{(\gamma_k)_L \frac{\left[(p_k)_L + (\pi_k)_L\right]}{(\rho_k)_L}};$$

$$(c_k)_R = \sqrt{(\gamma_k)_R \frac{\left[(p_k)_R + (\pi_k)_R\right]}{(\rho_k)_R}};$$

$$(Y_k)_L = \frac{(\alpha_k)_L (\rho_k)_L}{\rho_L};$$

$$(Y_k)_R = \frac{(\alpha_k)_R (\rho_k)_R}{\rho_R};$$

$$\rho_L = (\alpha_1)_L (\rho_1)_L + (\alpha_2)_L (\rho_2)_L;$$

$$\rho_R = (\alpha_1)_R (\rho_1)_R + (\alpha_2)_R (\rho_2)_R.$$

Скорость волны, движущейся направо, вычисляется так:

$$S_{\rm R} = \max\left(u_{\rm L} + c_{\rm L}, u_{\rm R} + c_{\rm R}\right) = \\ \max\left[u_{\rm L} + (c_{\rm 1})_{\rm L} (Y_{\rm 1})_{\rm L} + (c_{\rm 2})_{\rm L} (Y_{\rm 2})_{\rm L}, u_{\rm R} + (c_{\rm 1})_{\rm R} (Y_{\rm 1})_{\rm R} + (c_{\rm 2})_{\rm R} (Y_{\rm 2})_{\rm R}\right].$$
(11)

Для расчета скорости движения контактного разрыва используется выражение

$$S_{M} = \frac{\left(\rho_{L}u_{L}^{2} + p_{L}\right) - \left(\rho_{R}u_{R}^{2} + p_{R}\right) - S_{L}\rho_{L}u_{L} + S_{R}\rho_{R}u_{R}}{\rho_{L}u_{L} - \rho_{R}u_{R} - S_{L}\rho_{L} + S_{R}\rho_{R}},$$
 (12)

где

$$p_{\mathrm{L}} = (\alpha_{1})_{\mathrm{L}} (p_{1})_{\mathrm{L}} + (\alpha_{2})_{\mathrm{L}} (p_{2})_{\mathrm{L}};$$

$$p_{\mathrm{R}} = (\alpha_{1})_{\mathrm{R}} (p_{1})_{\mathrm{R}} + (\alpha_{2})_{\mathrm{R}} (p_{2})_{\mathrm{R}}.$$

152

Состояния газодинамических параметров в возмущенной области определяются следующим образом:

$$u^* = S_M, \tag{13}$$

$$\left(\alpha_{1}^{*}\right)_{L}=\left(\alpha_{1}\right)_{L},$$
(14)

$$\left(\alpha_{1}^{*}\right)_{R}=\left(\alpha_{1}\right)_{R},$$
(15)

$$\left(\rho_{k}^{*}\right)_{L}=\left(\rho_{k}\right)_{L}\frac{S_{L}-u_{L}}{S_{L}-S_{M}},\ \left(\rho_{k}^{*}\right)_{R}=\left(\rho_{k}\right)_{R}\frac{S_{R}-u_{R}}{S_{R}-S_{M}},$$
(16)

$$p^{*} = p_{R} + \rho_{R} u_{R} \times (u_{R} - S_{R}) - S_{M} \times (S_{M} - S_{R}) \times ((\alpha_{1}^{*})_{R} (\rho_{1}^{*})_{R} + (\alpha_{2}^{*})_{R} (\rho_{2}^{*})_{R}),$$
(17)

$$E_{\rm L}^{*} = \frac{\rho_{\rm L} E_{\rm L} \left(u_{\rm L} - S_{\rm L} \right) + \rho_{\rm L} u_{\rm L} - p^{*} S_{M}}{\left[\left(\alpha_{\rm 1}^{*} \right)_{\rm L} \left(\rho_{\rm 1}^{*} \right)_{\rm L} + \left(\alpha_{\rm 2}^{*} \right)_{\rm L} \left(\rho_{\rm 2}^{*} \right)_{\rm L} \right] \times \left(S_{M} - S_{\rm L} \right)},$$
(18)

где

$$E_{\rm L} = (Y_{\rm 1})_{\rm L} (e_{\rm 1})_{\rm L} + (Y_{\rm 2})_{\rm L} (e_{\rm 2})_{\rm L} + \frac{u_{\rm L}^2}{2} = = (Y_{\rm 1})_{\rm L} \frac{(p_{\rm 1})_{\rm L} + (\gamma_{\rm 1})_{\rm L} (\pi_{\rm 1})_{\rm L}}{(\rho_{\rm 1})_{\rm L} \times [(\gamma_{\rm 1})_{\rm L} - 1]} + (Y_{\rm 2})_{\rm L} \frac{(p_{\rm 2})_{\rm L} + (\gamma_{\rm 2})_{\rm L} (\pi_{\rm 2})_{\rm L}}{(\rho_{\rm 2})_{\rm L} \times [(\gamma_{\rm 2})_{\rm L} - 1]} + \frac{u_{\rm L}^2}{2}; E_{\rm R}^* = \frac{\rho_{\rm R} E_{\rm R} (u_{\rm R} - S_{\rm R}) + \rho_{\rm R} u_{\rm R} - p^* S_{M}}{[(\alpha_{\rm 1}^*)_{\rm R} (\rho_{\rm 1}^*)_{\rm R} + (\alpha_{\rm 2}^*)_{\rm R} (\rho_{\rm 2}^*)_{\rm R}] \times (S_{M} - S_{\rm R})},$$
(19)

где

$$E_{\rm R} = (Y_1)_{\rm R} (e_1)_{\rm R} + (Y_2)_{\rm R} (e_2)_{\rm R} + \frac{u_{\rm R}^2}{2} = = (Y_1)_{\rm R} \frac{(p_1)_{\rm R} + (\gamma_1)_{\rm R} (\pi_1)_{\rm R}}{(\rho_1)_{\rm R} \times [(\gamma_1)_{\rm R} - 1]} + (Y_2)_{\rm R} \frac{(p_2)_{\rm R} + (\gamma_2)_{\rm R} (\pi_2)_{\rm R}}{(\rho_2)_{\rm R} \times [(\gamma_2)_{\rm R} - 1]} + \frac{u_{\rm R}^2}{2}; p_k^* = (p_k + \pi_k) \frac{(\gamma_k - 1)\rho_k - (\gamma_k + 1)\rho_k^*}{(\gamma_k - 1)\rho_k^* - (\gamma_k + 1)\rho_k} - \pi_k.$$
(20)

153

Консервативная часть системы (6), (9) в отсутствие неконсервативных членов имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (u(\rho E + p))}{\partial x} = 0. \end{cases}$$
(21)

Численное решение системы (21) может быть записано в виде схемы Годунова:

$$U_{i}^{n+1} = U_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bigg[F^{*} \big(U_{i}^{n}, U_{i+1}^{n} \big) - F^{*} \big(U_{i-1}^{n}, U_{i}^{n} \big) \bigg],$$
(22)

где

$$U = (\alpha_{1}\rho_{1}, \alpha_{2}\rho_{2}, \rho u, \rho E)^{T};$$

$$F = \left[\alpha_{1}\rho_{1}u, \alpha_{2}\rho_{2}u, \rho u^{2} + p, (\rho E + p)u\right]^{T} =$$

$$= \left\{\alpha_{1}\rho_{1}u, \alpha_{2}\rho_{2}u, \rho u^{2} + \alpha_{1}p_{1} + \alpha_{2}p_{2}, \left[\rho\left(Y_{1}e_{1} + Y_{2}e_{2} + \frac{u^{2}}{2}\right) + p\right]u\right\}^{T}.$$

Значения потоковых величин в (22) определяются с использованием соотношений (13)—(20).

Новые величины объемной доли определяются также с применением метода Годунова из уравнения адвекции:

$$(\alpha_{1})_{i}^{n+1} = (\alpha_{1})_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left(u^{*} \alpha_{1}^{*}\right)_{i+1/2} - \left(u^{*} \alpha_{1}^{*}\right)_{i-1/2} - (\alpha_{1})_{i} \times \left[\left(u^{*}\right)_{i+1/2} - \left(u^{*}\right)_{i-1/2}\right] \right\}.$$

$$(23)$$

Численная схема (22), (23) обеспечивает положительность объемной доли на первом шаге решения системы (6).

Решение неконсервативных уравнений для внутренней энергии находится в предположении, что произведения $(\alpha_k \rho_k)_i^n$ не изменяются в течение временного отрезка Δt на первом шаге решения системы (6):

$$(\alpha_{k}\rho_{k}e_{k})_{i}^{n+1} = (\alpha_{k}\rho_{k}e)_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ (\alpha_{k}^{*}\rho_{k}^{*}e_{k}^{*}u^{*})_{i+1/2} - (\alpha_{k}^{*}\rho_{k}^{*}e_{k}^{*}u^{*})_{i-1/2} + (\alpha_{k}p_{k})_{i}^{n} \times \left[(u^{*})_{i+1/2} - (u^{*})_{i-1/2} \right] \}.$$

$$(24)$$

Численные ошибки, возникающие при таком вычислении значений внутренних энергий, не являются критическими, так как эти величины используются для оценки давлений в конце гиперболического шага. На следующем шаге будет учтено влияние релаксационных членов в правой части (6), что позволит внести поправки в найденные значения внутренних энергий.

Численная схема (22)—(24) обеспечивает сохранение однородности двухфазного потока в присутствии интерфейсной границы раздела фаз [5].

3.2. Релаксационный метод

На втором шаге численного решения системы (6) рассматривается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} = -p_1 \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} = p_1 \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} = 0, \end{cases}$$
(25)

где $\mu \to +\infty$.

Неконсервативные уравнения для внутренних энергий можно привести к виду

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + p_1 \frac{\partial \frac{1}{\rho_1}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + p_1 \frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{\partial t} = 0.$$
(26)

Численное интегрирование уравнений (26) осуществляется следующим образом:

$$e_{1}(p,\rho_{1})-e_{1}^{0}+p\left(\frac{1}{\rho_{1}}-\frac{1}{\rho_{1}^{0}}\right)=0,$$

$$e_{2}(p,\rho_{2})-e_{2}^{0}+p\left(\frac{1}{\rho_{2}}-\frac{1}{\rho_{2}^{0}}\right)=0.$$
(27)

Система уравнений (27) содержит три неизвестных параметра: p, ρ_1 и ρ_2 . С учетом постоянства парциальных плотностей во время релаксации для замыкания системы используется условие равенства суммы объемных долей единице:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1^0} + \frac{\alpha_2^0 \rho_2^0}{\rho_2^0} = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1} + \frac{\alpha_2^0 \rho_2^0}{\rho_2} = 1.$$
 (28)

Для уравнения состояния (2) система уравнений (27) и (28) эквивалентна уравнению с одним неизвестным:

$$F(p) = \alpha_1^0 \frac{p_1^0 + \gamma_1 \pi_1 + p(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(p + \pi_1)} + \alpha_2^0 \frac{p_2^0 + \gamma_2 \pi_2 + p(\gamma_2 - 1)}{\gamma_{21}(p + \pi_2)} - 1 = 0.$$
(29)

Решение уравнения (29) находится с использованием метода Ньютона. Значения плотностей каждой из фаз находятся из соотношений (27):

$$\rho_k = \rho_k^0 \frac{\gamma_k \left(\pi_k + p\right)}{p_k^0 + \gamma_k \pi_k + p\left(\gamma_k - 1\right)}.$$
(30)

Величина объемной доли определяется из условия сохранения массы:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1}.$$
(31)

Найденные в результате учета релаксации величины α_k , ρ_k и p могут быть не согласованы со значением полной энергии двухфазной смеси, определенной из решения соответствующего консервативного уравнения системы (21). Для решения этой проблемы используется уравнение состояния двухфазной смеси (12), которое должно выполняться как в однофазном пределе, так и в диффузионной зоне вблизи интерфейсной границы:

$$p(\rho, e, \alpha_{k}) = \frac{\rho e - \left(\frac{\alpha_{1}\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1}\right)}{\frac{\alpha_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}}{\gamma_{2}-1}} = \frac{\rho E - \rho \frac{u^{2}}{2} - \left(\frac{\alpha_{1}\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1}\right)}{\frac{\alpha_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}}{\gamma_{2}-1}}.$$
(32)

Численные исследования показывают, что поправленная при помощи соотношения (32) величина давления является довольно точной [5].

4. Результаты

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных с использованием описанной модели, для переноса интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений, распада разрыва в ударной водяной трубе и кавитации в воде. Также приведено сравнение результатов расчета с точным решением и с результатами, полученными с использованием двухфазной модели из пяти уравнений.

4.1. Перенос интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений

Левая часть метровой трубы (x < 0,5 м) заполнена водой, а правая — воздухом при атмосферном давлении. Для согласованности численной модели каждая фаза в начальный момент времени содержит малую долю

 (10^{-8}) другой фазы. Интерфейсная граница движется в однородном поле скоростей 100 м/с. Газодинамические параметры воды и воздуха приведены в табл. 1.



б

Рис. 1. Перенос интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений. Профили давления (*a*), скорости (б), плотности двухфазной смеси (*в*), объемной доли воздуха (*г*) и числа Маха (*д*). Появление осцилляций в профиле числа Маха для данных, полученных с использованием модели из пяти уравнений, связано с немонотонностью скорости звука двухфазной смеси в зависимости от объемной доли



Рис. 1 (окончание)

| <i>x</i> < 0,5 м | <i>x</i> > 0,5 м |
|--|--|
| <i>и</i> = 100 м/с | <i>u</i> = 100 м/с |
| $p = 10^5 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ ho_{\text{воды}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ | $ ho_{\rm воды} = 1000 \ {\rm Kr/m}^3$ |
| $ ho_{\text{воздуха}} = 10 \ \kappa \Gamma / \text{m}^3$ | $ ho_{\rm воздуха}=10~{\rm кг/m}^3$ |
| $\gamma_{\rm boglin}=4,4$ | $\gamma_{_{BOДЫ}}=4,4$ |
| $\gamma_{\text{воздуха}} = 1, 4$ | $\gamma_{_{BO3Jyxa}}=1,4$ |
| $\alpha_{\rm boggyxa} = 10^{-8}$ | $\alpha_{_{BO3JYXA}} = 1 - 10^{-8}$ |

Таблица 1. Газодинамические параметры воды и воздуха для задачи о переносе интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений

На рис. 1 приведены результаты расчета для момента времени 2,79 мс, выполненного на сетке из 1000 ячеек при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*), объемной доли воздуха (*г*), а также числа Маха (*д*). Также представлены результаты расчета, полученные с использованием модели из пяти уравнений и точное решение. Видно хорошее согласие результатов, полученных по разным моделям, а также согласие с аналитическим решением за исключением профиля для числа Маха. Монотонная в зависимости от объемной доли «вмороженная» скорость звука (8) в данной модели в отличие от немонотонной зависимости равновесной скорости звука (5) в модели из пяти уравнений не приводит к возникновению осцилляций.

4.2. Распад разрыва в ударной водяной трубе

Левая часть метровой трубы ($x < 0,75\,{\rm m}$) заполнена водой при высоком давлении $10^9~{\rm \Pi a}$. Правая часть трубы ($x > 0,75\,{\rm m}$) содержит воздух при атмосферном давлении. Для согласованности численной модели каждая фаза содержит малую долю (10^{-6}) другой фазы. В начальный момент двухфазная среда находится в состоянии покоя. Газодинамические параметры воды и воздуха приведены в табл. 2.

| <i>x</i> < 0,75 м | <i>x</i> > 0,75 м |
|---|---|
| <i>и</i> = 0 м/с | u = 0 м/c |
| $p = 10^9 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ \rho_{\rm воды} = 1000 \ {\rm kg/m}^3 $ | $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ |
| $ \rho_{\text{воздуха}} = 1 \ \text{кг/m}^3 $ | $ \rho_{\text{воздуха}} = 1 \ \text{кг/m}^3 $ |
| $\gamma_{\text{воды}} = 4, 4$ | $\gamma_{_{BODBI}}=4,4$ |
| $\gamma_{\text{воздуха}} = 1, 4$ | $\gamma_{_{BO3Jyxa}}=1,4$ |
| $\alpha_{\text{воздуха}} = 10^{-6}$ | $\alpha_{\rm Bo3dyxa} = 1 - 10^{-6}$ |

Таблица 2. Газодинамические параметры воды и воздуха для задачи о распаде разрыва в ударной водяной трубе

На рис. 2 приведены результаты расчеты для момента времени 240 мкс, выполненного на сетке из 1000 ячеек при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*). Также представлены результаты расчета, полученные с использованием модели из пяти уравнений и точное решение. Видно, что при такой большой разнице начальных давлений (четыре порядка) результаты, полученные с использованием описанной в данной работе модели, лучше согласуются с точным решением.



Рис. 2. Распад разрыва в ударной водяной трубе. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*)



4.3. Кавитация в воде

Метровая труба заполнена водой с плотностью $1000 \,\mathrm{kr/M^3}$ при атмосферном давлении. Объемная примесь воздуха с плотностью $1 \,\mathrm{kr/M^3}$ составляет величину 10^{-2} . Скорость двухфазной среды в левой части трубы ($x < 0,5 \,\mathrm{m}$) равна $-10 \,\mathrm{m/c}$, а скорость в правой части трубы ($x > 0,5 \,\mathrm{m}$) составляет величину $10 \,\mathrm{m/c}$. Начальные данные для расчета кавитации приведены в табл. 3.

| <i>x</i> < 0,5 м | <i>x</i> > 0,5 м |
|---|--|
| u = -10 M/c | <i>и</i> = 10 м/с |
| $p = 10^5 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ ho_{\rm воды}=1000~{\rm kg/m}^3$ | $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ |
| $ \rho_{\text{воздуха}} = 1 \ \text{кг/m}^3 $ | $ ho_{\rm воздуха}=1~{\rm kg/m}^3$ |
| $\gamma_{\text{воды}} = 4, 4$ | $\gamma_{_{BOJbi}}=4,4$ |
| $\gamma_{\text{воздуха}} = 1, 4$ | $\gamma_{\text{воздуха}}=1,4$ |
| $\alpha_{_{BO3JYXA}} = 10^{-2}$ | $\alpha_{_{BO3JYXa}} = 10^{-2}$ |

Таблица 3. Газодинамические параметры воды и воздуха для задачи о кавитации

В начальный момент времени явный интерфейс, разделяющий воду и воздух, отсутствует, и кавитация происходит в двухкомпонентной смеси с малой долей газа. На рис. 3 представлены результаты расчета на сетке из 1000 ячеек для момента времени 3 мс при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухкомпонентной смеси (*в*), а также профили объемной доли воздуха (*г*). На каждом графике также представлены зависимости, полученные с использованием баротропной модели. Видно распространение влево и вправо двух волн разрежения. В центральной области увеличивается объемная доля газовой фазы, что приводит к динамическому появлению интерфейсной границы раздела фаз. Рост объемной доли воздуха связан с его механическим расширением, так как изначально воздух содержится в воде в малых пропорциях.



б

Рис. 3. Кавитация в воде. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*)



Рис. 3 (окончание)

5. Заключение

Представленный релаксационный метод расчета ударных волн и кавитирующих потоков в двухкомпонентных и двухфазных сжимаемых средах значительно упрощает численную аппроксимацию двухфазной механически равновесной модели из пяти уравнений [1]. Предельный переход от неравновесной по давлению модели к равновесной осуществляется с применением численной процедуры мгновенной релаксации давления, которая рассчитывается с использованием простого и робастного алгоритма. В работе приведены одномерные расчеты для переноса интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений, распада разрыва в ударной водяной трубе и кавитации в воде.

Применение данной модели для двумерных расчетов осуществляется с использованием метода расщепления по направлениям.

Литература

- Kapila A., Menikoff R., Bdzil J. et al. Two-phase modeling of DDT in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 3002—3024.
- Petitpas F., Franquet E., Saurel R., Le Metayer O. A relaxation-projection method for compressible flows. — Pt. 2: Artificial heat exchanges for multiphase shocks // J. Comput. Phys. — 2007. — Vol. 225. — P. 2214— 2248.
- Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // Shock Waves / Spinger. — 2007. — Vol. 16. — P. 209—232.
- Baer M. R., Nunziato J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Intl. J. Multiphase Flows. — 1986. — Vol. 12. — P. 861—889.
- Saurel R., Petitpas F., Berry R. A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // J. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 228. — P. 1678—1712.
- Saurel R., Petitpas F., Abgrall R. Modelling phase transition in metastable liquids: application to cavitating and flashingflows // J. Fluid Mech. — 2008. — Vol. 607. — P. 313—350.

Сравнение численных методов для расчетов двухфазных потоков

1. Введение

В настоящее время существует целый ряд различных математических моделей и реализующих их численных схем, описывающих поведение двухфазных и двухкомпонентных сжимаемых сред. Значительное развитие получили модели, в которых каждый из компонентов двухфазной среды обладает собственным уравнением состояния и имеет собственные термодинамические параметры. При этом полное число уравнений удваивается. Кроме того, для замыкания системы уравнений обычно добавляется еще одно уравнение адвекции для объемной или массовой доли одного из компонентов двухфазной среды. Взаимодействие между компонентами моделируется с использованием неконсервативных интерфейсных членов в правых частях уравнений. Численная аппроксимация этих членов вызывает основные трудности при наличии контактных разрывов и ударных волн [1].

В неравновесной модели из семи уравнений с использованием метода дискретных уравнений [2] отмеченные недостатки преодолеваются благодаря более глубокому анализу топологии двухфазных потоков. Численная схема позволяет получать корректное решение также при прохождении ударных волн через области с резкими градиентами объемной доли. Используемый римановский солвер описывает взаимодействие фаз на каждой интерфейсной границе раздела сред. Каждая фаза описывается тремя уравнениями, полученными из законов сохранения, и имеет собственные значения термодинамических параметров и уравнение состояния. Вычисление потоков осуществляется с использованием процедуры усреднения по различным возможным топологическим реализациям состояния двухфазной среды на интерфейсе. Также достигается корректная аппроксимация неконсервативных членов и дополнительных связей, определяющих релаксацию давлений и скоростей в двухфазной среде. Эта модель не нуждается во введении дополнительных параметров. В одномерном случае метод включает семь уравнений и легко обобщается на случай двумерных и трехмерных расчетов. Существенным недостатком модели является ее громоздкость при численной реализации.

Во многих физических процессах механическое равновесие в двухфазной системе достигается очень быстро. Для описания таких процессов успешно применяется механически равновесная модель из пяти уравнений. Она состоит из двух уравнений сохранения массы, уравнения сохранения полного импульса двухфазной смеси, уравнения сохранения полной энергии двухфазной смеси и уравнения адвекции для объемной доли. Каждая фаза имеет одинаковые величины давления и скорости, но отличные значения температуры и химического потенциала. Однако эта модель обладает рядом недостатков. Присутствие неконсервативного члена в уравнении переноса объемной доли, что является следствием равенства давлений, может приводить к ее отрицательным значениям при расчетах сильных ударных волн или волн разрежения. Также немонотонная зависимость скорости звука от величины объемной доли приводит к ошибкам в вычислениях распространения волн через границу раздела фаз [3; 4].

Исключая условие равенства давлений из предыдущей модели, можно получить более робастную модель из шести уравнений [5]. Она включает уравнение переноса для объемной доли, два уравнения сохранения массы, уравнение сохранения полного импульса двухфазной смеси, два уравнения сохранения внутренней энергии каждой из фаз смеси. Седьмое дополнительное уравнение, описывающее сохранение полной энергии двухфазной смеси, используется для правильного моделирования ударных волн в однофазном пределе. Введение этого уравнения существенно упрощает алгоритм численного решения. Равенство давлений достигается с использованием процесса релаксации. Модель из шести уравнений обеспечивает положительность объемной доли и монотонность скорости звука.

В настоящей работе приводится качественное сравнение результатов расчетов двухфазных газодинамических сжимаемых течений, выполненных с использованием трех различных моделей. В разделе 2 приводится краткое описание методик расчета двухфазных сжимаемых потоков с использованием механически неравновесной двухфазной модели, механически равновесной двухфазной модели и механически неравновесной по давлению двухфазной модели. В разделе 3 представлены результаты расчета одномерных задач с использованием описанных численных методов. Также приведено сравнение результатов расчета с точным решением.

2. Описание двухфазных численных моделей

В основе рассматриваемых в данной работе моделей двухфазных сжимаемых потоков лежит механически неравновесная модель из семи уравнений [6]. В пределе мгновенной релаксации давлений и скоростей каждой из фаз можно получить механически равновесную двухфазную модель из пяти уравнений [3; 7]. Более робастная неравновесная по давлению двухфазная модель из шести уравнений также может быть получена в пределе мгновенной релаксации скоростей каждой из фаз.

2.1. Механически неравновесная двухфазная модель из семи уравнений (метод дискретных уравнений)

Неравновесная двухфазная модель включает семь уравнений:

$$\frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u}_{I} \times \nabla \alpha_{1} = \mu \times (p_{1} - p_{2}),$$

$$\frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}_{1}) = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}_{1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{1} \rho_{k} \vec{u}_{k} \otimes \vec{u}_{k}) + \nabla(\alpha_{1} p_{1}) = p_{I} \nabla \alpha_{1} + \lambda (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}),$$

$$\frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} E_{1}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{1} (\rho_{1} E_{1} + p_{1}) \vec{u}_{1}) = p_{I} u_{I} \nabla \alpha_{1} + \lambda \vec{u}_{I} \cdot (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}) - p_{I} \mu (p_{1} - p_{2}),$$

$$\frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{2} \rho_{2} \vec{u}_{2}) = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} \vec{u}_{2}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{2} (\rho_{2} E_{2} + p_{2}) \vec{u}_{2}) = p_{I} u_{I} \nabla \alpha_{2} - \lambda (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}) + p_{I} \mu (p_{1} - p_{2}),$$

$$\frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} E_{2}}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{2} (\rho_{2} E_{2} + p_{2}) \vec{u}_{2}) = p_{I} u_{I} \nabla \alpha_{2} - \lambda \vec{u}_{I} \cdot (\vec{u}_{2} - \vec{u}_{1}) + p_{I} \mu (p_{1} - p_{2}),$$

где α_k — объемная доля; \vec{u}_k — скорость; p_k — давление; ρ_k — плотность; $E_k = e_k + \frac{\vec{u}_k^2}{2}$ — полная удельная энергия; e_k — внутренняя удельная энергия; k = 1, 2; \vec{u}_l — интерфейсная скорость; p_l — интерфейсное давление.

Численный метод решения системы (1) основывается на интегральном усреднении уравнений с учетом топологии двухфазной смеси. В одномерном случае, используя уравнение адвекции со скоростью о для характеристической функции двухфазной смеси $\frac{\partial X_1}{\partial t} + \sigma \frac{\partial X_1}{\partial x} = 0$, можно получить следующую форму уравнений для неравновесной модели:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \varepsilon \left(\sigma \frac{\partial X_{1}}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{1} \rho_{1} u_{1} \right)}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} u_{1}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{1} \left(\rho_{1} u_{1}^{2} + P_{1} \right) \right)}{\partial x} \right) = \varepsilon \left(P_{1} \frac{\partial X_{1}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} E_{1}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{1} u_{1} \left(\rho_{1} E_{1} + P_{1} \right) \right)}{\partial x} \right) = \varepsilon \left(u_{1} P_{1} \frac{\partial X_{1}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{2} \rho_{2} u_{2} \right)}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} u_{2}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{2} \left(\rho_{2} u_{2}^{2} + P_{2} \right) \right)}{\partial x} \right) = \varepsilon \left(P_{2} \frac{\partial X_{2}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} E_{2}}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial \left(X_{2} u_{2} \left(\rho_{2} E_{2} + P_{2} \right) \right)}{\partial x} \right) = \varepsilon \left(u_{2} P_{2} \frac{\partial X_{2}}{\partial x} \right), \end{cases}$$

где ε () — процедура усреднения, коммутирующая с пространственной и временной производными; $\alpha_k = \varepsilon(X_k)$.

Процедура интегрального усреднения консервативных потоковых членов, а также неконсервативных членов с учетом более детального анализа топологии двухфазной смеси подробно изложена в [2].

Средняя величина конвективного потока для первой фазы в (2) $\varepsilon(X_1F_1(U)) = \varepsilon(X_1\rho_1u_1, X_1(\rho_1u_1^2 + P_1), X_1(\rho_1E_1 + P_1)u_1)^T$ на (i+1/2) интерфейсе расчетной сетки находится как сумма вкладов от возможных

терфейсе расчетной сетки находится как сумма вкладов от возможных топологических реализаций двухфазной среды на данном интерфейсе:

$$\begin{aligned} \varepsilon (X_{1}F_{1})_{i+1/2} &= \\ &= \max \left[(\alpha_{1})_{i} - (\alpha_{1})_{i+1}, 0 \right] \times F_{\text{RIM}} \left((W_{1})_{i}, (W_{2})_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)} \right)^{+} + \\ &+ \min \left[(\alpha_{1})_{i}, (\alpha_{1})_{i+1} \right] \times F_{\text{RIM}} \left((W_{1})_{i}, (W_{1})_{i+1} \right) + \\ &+ \max \left[(\alpha_{1})_{i+1} - (\alpha_{1})_{i}, 0 \right] \times F_{\text{RIM}} \left((W_{2})_{i}, (W_{1})_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)} \right)^{-}, \end{aligned}$$
(3)

где

$$(W_k)_i = [(\rho_k)_i, (\rho_k u_k)_i, (\rho_k E_k)_i]^T, k = 1, 2;$$

 $F_{\text{RIM}}\left(\left(W_{\text{L}}\right)_{i},\left(W_{\text{R}}\right)_{i+1}\right)$ — конвективный поток на границе (i+1/2) ячейки *i*, вычисленный с использованием точного римановского солвера [8] для начальных состояний W_{L} слева и W_{R} справа;

$$\begin{pmatrix} \beta_{i+1/2}^{(1,2)} \end{pmatrix}^{+} = \begin{cases} 1, \ \text{если } \sigma((W_{1})_{i}, (W_{2})_{i+1}) \ge 0, \\ 0, \ \text{если } \sigma((W_{1})_{i}, (W_{2})_{i+1}) < 0; \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} \beta_{i+1/2}^{(1,2)} \end{pmatrix}^{-} = \begin{cases} 1, \ \text{если } \sigma((W_{2})_{i}, (W_{1})_{i+1}) \ge 0, \\ 0, \ \text{если } \sigma((W_{2})_{i}, (W_{1})_{i+1}) < 0. \end{cases}$$

Аналогично определяется средняя величина конвективного потока для второй фазы в (2):

$$\varepsilon (X_{2}F_{2})_{i+1/2} = \max \left((\alpha_{2})_{i} - (\alpha_{2})_{i+1}, 0 \right) \times F_{\text{RIM}} \left((W_{2})_{i}, (W_{1})_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)} \right)^{+} + \\ + \min \left((\alpha_{2})_{i}, (\alpha_{2})_{i+1} \right) \times F_{\text{RIM}} \left((W_{2})_{i}, (W_{2})_{i+1} \right) + \\ + \max \left((\alpha_{2})_{i+1} - (\alpha_{2})_{i}, 0 \right) \times F_{\text{RIM}} \left((W_{1})_{i}, (W_{2})_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)} \right)^{-}.$$
(4)

Средняя величина потока Лагранжа для первой фазы в (2) $\varepsilon \left(\left(F_1 \right)_{lag} \left(U \right) \right) = \varepsilon \left(0, P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x}, P_1 u_1 \frac{\partial X_1}{\partial x} \right)^T$ в *i*-й расчетной ячейке определянется следующим образом:

Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\varepsilon \Big((F_1)_{iag} \Big)_i = \Big[-\max \Big((\alpha_1)_i - (\alpha_1)_{i+1}, 0 \Big) \times F^{lag} \Big((W_1)_i, (W_2)_{i+1} \Big) \times \Big(\beta_{i+1/2}^{(1,2)} \Big)^- + \\ + \max \Big((\alpha_1)_{i+1} - (\alpha_1)_i, 0 \Big) \times F^{lag} \Big((W_2)_i, (W_1)_{i+1} \Big) \times \Big(\beta_{i+1/2}^{(2,1)} \Big)^- - \\ - \max \Big((\alpha_1)_{i-1} - (\alpha_1)_i, 0 \Big) \times F^{lag} \Big((W_1)_{i-1}, (W_2)_i \Big) \times \Big(\beta_{i-1/2}^{(1,2)} \Big)^+ + \\ + \max \Big((\alpha_1)_i - (\alpha_1)_{i-1}, 0 \Big) \times F^{lag} \Big((W_2)_{i-1}, (W_1)_i \Big) \times \Big(\beta_{i-1/2}^{(2,1)} \Big)^+ + \\ + \Lambda_i \times \Big(F^{lag} \Big((W_1)_i, (W_2)_i \Big) - F^{lag} \Big((W_2)_i, (W_1)_i \Big) \Big) \Big],$$

где $F^{\log}\left(\left(W_{\mathrm{L}}\right)_{i},\left(W_{\mathrm{R}}\right)_{i+1}\right)$ — поток Лагранжа на границе (i+1/2) ячейки i, вычисленный с использованием точного римановского солвера [8] для начальных состояний W_{L} слева и W_{R} справа;

$$\Lambda_i = \frac{\epsilon(N_{\rm int})_i}{\Delta x_i}$$
 — среднее число внутренних интерфейсов в ячейке i .

Также определяется средняя величина потока Лагранжа для второй фазы в (2) в *i*-й расчетной ячейке:

$$\varepsilon \left(\left(F_{2}\right)_{lag} \right)_{i} = \left[-\max\left(\left(\alpha_{2}\right)_{i} - \left(\alpha_{2}\right)_{i+1}, 0 \right) \times F^{\log}\left(\left(W_{2}\right)_{i}, \left(W_{1}\right)_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)}\right)^{-} + \\ + \max\left(\left(\alpha_{2}\right)_{i+1} - \left(\alpha_{1}\right)_{i}, 0 \right) \times F^{\log}\left(\left(W_{1}\right)_{i}, \left(W_{2}\right)_{i+1} \right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)}\right)^{-} - \\ - \max\left(\left(\alpha_{2}\right)_{i-1} - \left(\alpha_{2}\right)_{i}, 0 \right) \times F^{\log}\left(\left(W_{2}\right)_{i-1}, \left(W_{1}\right)_{i} \right) \times \left(\beta_{i-1/2}^{(2,1)}\right)^{+} + \\ + \max\left(\left(\alpha_{2}\right)_{i} - \left(\alpha_{2}\right)_{i-1}, 0 \right) \times F^{\log}\left(\left(W_{1}\right)_{i-1}, \left(W_{2}\right)_{i} \right) \times \left(\beta_{i-1/2}^{(1,2)}\right)^{+} + \\ + \Lambda_{i} \times \left(F^{\log}\left(\left(W_{2}\right)_{i}, \left(W_{1}\right)_{i} \right) - F^{\log}\left(\left(W_{1}\right)_{i}, \left(W_{2}\right)_{i} \right) \right) \right] .$$

Численная аппроксимация уравнения адвекции объемной доли из системы (2) имеет вид

$$\frac{\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x_{i}}\times \left[-\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i}-\left(\alpha_{1}\right)_{i+1},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i},\left(W_{2}\right)_{i+1}\right)\times\left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)}\right)^{-}+\right.\right.\\\left.+\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i},\left(W_{1}\right)_{i+1}\right)\times\left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)}\right)^{-}-\right.$$

$$\left.-\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i-1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i-1},\left(W_{2}\right)_{i}\right)\times\left(\beta_{i-1/2}^{(1,2)}\right)^{+}+\right.\\\left.+\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i}-\left(\alpha_{1}\right)_{i-1},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i-1},\left(W_{1}\right)_{i}\right)\times\left(\beta_{i-1/2}^{(2,1)}\right)^{+}\right]+\right.$$

$$\left.+\Lambda_{i}\times\left(\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i},\left(W_{2}\right)_{i}\right)-\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i},\left(W_{1}\right)_{i}\right)\right)=0.$$
(7)

Средняя величина потока Лагранжа из (5) и (6) может быть представлена в виде суммы вкладов от внешних и внутренних интерфейсов:

$$\varepsilon \left(\left(F_k \right)_{\text{lag}} \right)_i = \varepsilon \left(\left(F_k \right)_{\text{lag}} \right)_i^{\text{bound}} + \varepsilon \left(\left(F_k \right)_{\text{lag}} \right)_i^{\text{relax}}, \tag{8}$$

где *k* = 1, 2;

$$\varepsilon\left(\left(F_{1}\right)_{\mathrm{lag}}\right)_{i}^{\mathrm{relax}} = \Lambda_{i} \times \left[F^{\mathrm{lag}}\left(\left(W_{1}\right)_{i}, \left(W_{2}\right)_{i}\right) - F^{\mathrm{lag}}\left(\left(W_{2}\right)_{i}, \left(W_{1}\right)_{i}\right)\right];$$
(9)

$$\frac{\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x_{i}}\times$$

$$\times\left[-\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i}-\left(\alpha_{1}\right)_{i+1},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i},\left(W_{2}\right)_{i+1}\right)\times\left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)}\right)^{-}+\right.\right.$$

$$+\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i},\left(W_{1}\right)_{i+1}\right)\times\left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)}\right)^{-}-\right.$$

$$\left.-\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i-1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i-1},\left(W_{2}\right)_{i}\right)\times\left(\beta_{i-1/2}^{(1,2)}\right)^{+}+\right.$$

$$\left.+\max\left(\left(\alpha_{1}\right)_{i}-\left(\alpha_{1}\right)_{i-1},0\right)\times\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i-1},\left(W_{1}\right)_{i}\right)\times\left(\beta_{i-1/2}^{(2,1)}\right)^{+}\right]+\right.$$

$$\left.+\Lambda_{i}\times\left(\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i},\left(W_{2}\right)_{i}\right)-\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i},\left(W_{1}\right)_{i}\right)\right)=0.$$

Аналогично разделяются вклады внешних и внутренних интерфейсов в уравнение адвекции объемной доли. Тогда численное решение системы (2) можно найти, последовательно вычисляя вклады от внешних и внутренних интерфейсов.

Первый шаг:

ſ

$$\begin{cases} \frac{(\alpha_{1})_{i}^{'} - (\alpha_{1})_{i}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x_{i}} \times \\ \times \left[-\max\left((\alpha_{1})_{i} - (\alpha_{1})_{i+1}, 0\right) \times \sigma\left((W_{1})_{i}, (W_{2})_{i+1}\right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(1,2)}\right)^{-} + \right. \\ \left. + \max\left((\alpha_{1})_{i+1} - (\alpha_{1})_{i}, 0\right) \times \sigma\left((W_{2})_{i}, (W_{1})_{i+1}\right) \times \left(\beta_{i+1/2}^{(2,1)}\right)^{-} - \right. \\ \left. - \max\left((\alpha_{1})_{i-1} - (\alpha_{1})_{i}, 0\right) \times \sigma\left((W_{1})_{i-1}, (W_{2})_{i}\right) \times \left(\beta_{i-1/2}^{(1,2)}\right)^{+} + \right. \\ \left. + \max\left((\alpha_{1})_{i} - (\alpha_{1})_{i-1}, 0\right) \times \sigma\left((W_{2})_{i-1}, (W_{1})_{i}\right) \times \left(\beta_{i-1/2}^{(2,1)}\right)^{+} \right] = 0, \\ \left. \frac{\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{'} (W_{1})_{i}^{'} - \left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n} (W_{1})_{i}^{n}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon(X_{1}F_{1})_{i+1/2} - \varepsilon(X_{1}F_{1})_{i-1/2}}{\Delta x_{i}} = \varepsilon\left(F_{1}^{\log}\right)_{i}^{\operatorname{bound}}, \\ \left. \frac{\left(\alpha_{2}\right)_{i}^{'} (W_{2})_{i}^{'} - \left(\alpha_{2}\right)_{i}^{n} (W_{2})_{i}^{n}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon(X_{2}F_{2})_{i+1/2} - \varepsilon(X_{2}F_{2})_{i-1/2}}{\Delta x_{i}} = \varepsilon\left(F_{2}^{\log}\right)_{i}^{\operatorname{bound}}. \end{cases}$$

Второй шаг:

$$\left\{ \frac{\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{'}}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x_{i}}\Lambda_{i} \times \left[\sigma\left(\left(W_{1}\right)_{i},\left(W_{2}\right)_{i}\right)-\sigma\left(\left(W_{2}\right)_{i},\left(W_{1}\right)_{i}\right)\right] = 0, \\ \frac{\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{n+1}\left(W_{1}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{1}\right)_{i}^{'}\left(W_{1}\right)_{i}^{'}}{\Delta t} = \varepsilon\left(F_{1}^{\text{lag}}\right)_{i}^{\text{relax}}, \\ \frac{\left(\alpha_{2}\right)_{i}^{n+1}\left(W_{2}\right)_{i}^{n+1}-\left(\alpha_{2}\right)_{i}^{'}\left(W_{2}\right)_{i}^{'}}{\Delta t} = \varepsilon\left(F_{2}^{\text{lag}}\right)_{i}^{\text{relax}},$$
(12)

где $\varepsilon \left(F_k^{\text{lag}}\right)_i^{\text{bound}}$ и $\varepsilon \left(F_k^{\text{lag}}\right)_i^{\text{relax}}$ определяются из (3), (4) и (5), (6) соответственно.

В случае перемешивании фаз, т. е при большом значении величины Λ_i , решение (12) эквивалентно введению мгновенной релаксации для скоростей и давлений [9].

2.2. Механически равновесная двухфазная модель из пяти уравнений с использованием двухфазного римановского солвера и релаксационного метода при лагранжевом подходе

Механически равновесная двухфазная модель состоит из пяти уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \alpha_{1} = \frac{\alpha_{1} \alpha_{2} \left(\rho_{2} c_{2}^{2} - \rho_{1} c_{1}^{2}\right)}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2}\right)} \times \operatorname{div} \vec{u} + \\ + \frac{\alpha_{1} \alpha_{2}}{\left(\alpha_{2} \rho_{1} c_{1}^{2} + \alpha_{1} \rho_{2} c_{2}^{2}\right)} \times \left(\frac{\Gamma_{1}}{\alpha_{1}} + \frac{\Gamma_{2}}{\alpha_{2}}\right) Q_{1}, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}\right) = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\alpha_{1} \rho_{1} \vec{u}\right) = 0, \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}\right) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{u} \left(\rho E + p\right)\right) = 0, \end{cases}$$
(13)

где $\Gamma_k = \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial e_k} \right)_{\rho_k}$ — коэффициент Грюнайзена для фазы k, k = 1, 2; $Q = H \left(T_2 - T_1 \right) = h \times S_I$ — теплообмен; h — коэффициент конвективной теплопередачи; S_I — интерфейсная поверхность теплообмена.

Основные проблемы, возникающие при численном решении системы (13), связаны с неконсервативной формой уравнения для объемной доли. Первая проблема связана с тем, что классические соотношения Ренкина— Гюгонио на фронте ударной волны оказываются неприменимыми для использования в римановском солвере. Чтобы решить эту проблему, в работе [10] были получены соотношения, которые связывают параметры находящейся в механическом равновесии двухфазной среды до и после фронта ударной волны:

$$\begin{cases} Y_{k} = Y_{k}^{0}, \\ p - p_{0} + m^{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \quad m = \rho(u - \sigma) = \rho_{0} \left(u_{0} - \sigma\right), \\ u - u_{0} \pm m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ e_{k} - e_{k}^{0} + \frac{p + p_{0}}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \end{cases}$$
(14)

где $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$; $\rho_0 = (\alpha_1 \rho_1)_0 + (\alpha_2 \rho_2)_0$; k = 1, 2; нижний индекс «О» соответствует состоянию перед ударной волной.

Соотношения (14) обеспечивают выполнение законов сохранения для двухфазной смеси. В предельном однофазовом случае эти соотношения совпадают с классическими связями Рэнкина—Гюгонио. Также они обеспечивают сохранение положительности объемной доли и являются симметричными относительно фаз. Кроме того, расчеты, выполненные с применением соотношений (14), полностью согласуются с экспериментальными данными [10].

Для расчетов с применением соотношений (14) можно использовать римановский солвер в приближении двух ударных волн [11]. Для уравнения

состояния вида $e(P,\rho) = \frac{P+\gamma\pi}{(\gamma-1)\rho_{\nu}} + q$ (γ , π — константы, характеризу-

ющие свойства вещества) соотношения (14) примут вид

$$\begin{cases} Y_{k} = Y_{k}^{0}, \\ p - p_{0} + m^{2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ u - u_{0} \pm m \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{0}}\right) = 0, \\ \rho_{k} = \rho_{k}^{0} \frac{(\gamma_{k} + 1)(p + \pi_{k}) + (\gamma_{k} - 1)(p^{0} + \pi_{k})}{(\gamma_{k} - 1)(p + \pi_{k}) + (\gamma_{k} + 1)(p^{0} + \pi_{k})}. \end{cases}$$
(15)

Величина неизвестного давления находится из решения методом Ньютона нелинейного уравнения $f(p^*) = 0$, где

$$f(p^{*}) = u_{R} - u_{L} + \frac{p^{*} - p_{R}}{m_{R}} + \frac{p^{*} - p_{L}}{m_{L}} = u_{R} - u_{L} + + (p^{*} - p_{R}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{R}}{(\rho_{1})_{R} (p^{*} (\gamma_{1} + 1) + p_{R} (\gamma_{1} - 1) + 2\pi_{1} \gamma_{1})} + + \frac{(Y_{2})_{R}}{(\rho_{2})_{R} (p^{*} (\gamma_{2} + 1) + p_{R} (\gamma_{2} - 1) + 2\pi_{2} \gamma_{2})} \right)^{1/2} +$$
(16)
$$+ (p^{*} - p_{L}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{L}}{(\rho_{1})_{L} (p^{*} (\gamma_{1} + 1) + p_{L} (\gamma_{1} - 1) + 2\pi_{1} \gamma_{1})} + + \frac{(Y_{2})_{L}}{(\rho_{2})_{L} (p^{*} (\gamma_{2} + 1) + p_{L} (\gamma_{2} - 1) + 2\pi_{2} \gamma_{2})} \right)^{1/2},$$

нижние индексы « R » и « L » соответствуют начальным значениям газодинамических параметров фаз справа и слева от разрыва при постановке задачи Римана.

После вычисления величины давления p^* значение скорости определяется из соотношения:

$$u^{*} = u_{L} - (p^{*} - p_{L}) \times \sqrt{2} \times \left(\frac{(Y_{1})_{L}}{(\rho_{1})_{L} (p^{*}(\gamma_{1} + 1) + p_{L}(\gamma_{1} - 1) + 2\pi_{1}\gamma_{1})} + \frac{(Y_{2})_{L}}{(\rho_{2})_{L} (p^{*}(\gamma_{2} + 1) + p_{L}(\gamma_{2} - 1) + 2\pi_{2}\gamma_{2})} \right)^{1/2}.$$
(17)

Вторая проблема, возникающая при численном решении системы (13), связана с усреднением величины объемной доли в ячейке расчетной сетки, так как усреднение имеет смысл только для консервативных переменных. Для решения этой проблемы в [4] был предложен лагранжев подход с применением метода релаксации газодинамических переменных. На рис. 1 показано смещение положения границ лагранжевой ячейки на постоянной сетке в общем случае. Смещение границ рассчитывается с использованием описанного приближенного римановского солвера для нахождения интерфейсных скоростей $u_{i+1/2}^*$. Таким образом, в данной расчетной ячейке может находиться до трех областей с различными значениями термодинамических переменных. Определение средних значений этих параметров и является задачей метода релаксации.



Рис. 1. Смещение границ лагранжевых ячеек внутри фиксированной *i* -й ячейки на эйлеровой сетке

Сохранение полной массы двухфазной смеси, а также массы каждого из компонентов обеспечивается выполнением следующих соотношений для каждой *i* -й ячейки фиксированной расчетной сетки:

$$\rho^* = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^*\right)_j \times \left(\rho_k^*\right)_j = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^0\right)_j \times \left(\rho_k^0\right)_j = \rho^0 = \rho, \quad (18)$$

$$\alpha_k^* \rho_k^* = \sum_{j=1,3} \beta_j \times \left(\alpha_k^*\right)_j \times \left(\rho_k^*\right)_j = \sum_{j=1,3} \beta_j \times \left(\alpha_k^0\right)_j \times \left(\rho_k^0\right)_j = \alpha_k^0 \rho_k^0 = \alpha_k \rho_k, \ k = 1, 2,$$
(19)

где верхний индекс «О» обозначает начальные состояния газодинамических параметров в лагранжевых ячейках; верхний индекс « » обозначает состояния газодинамических параметров после релаксации. Суммирование в (18) и (19) осуществляется по всем лагранжевым ячейкам, границы которых лежат внутри фиксированной *i*-й ячейки на эйлеровой сетке. Требование сохранения полного импульса двухфазной смеси позволяет получить:

$$\rho^{*}u^{*} = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{*})_{j} \times (\rho_{k}^{*})_{j} \times u_{j}^{*} = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j} \times u_{j}^{0}.$$
(20)

Так как после релаксации в *i*-й ячейке содержится двухфазная среда, состояние которой описывается одним значением скорости u^* , то, полагая в (20) $u_i^* = u^*$, легко видеть, что

$$u^{*} = \frac{\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j} \times u_{j}^{0}}{\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j}}.$$
 (21)

Закон сохранения полной энергии двухфазной смеси может быть записан следующим образом:

$$\rho^{*}E^{*} = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{*})_{j} \times (\rho_{k}^{*})_{j} \times \left[\frac{(u^{*})^{2}}{2} + \frac{p^{*} + \gamma_{k}\pi_{k}}{(\rho_{k}^{*})_{j}(\gamma_{k}-1)} + q_{k}\right] =$$

$$= \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_{j} \times (\alpha_{k}^{0})_{j} \times (\rho_{k}^{0})_{j} \times \left[\frac{(u_{j}^{0})^{2}}{2} + \frac{(p_{k}^{0})_{j} + \gamma_{k}\pi_{k}}{(\rho_{k}^{0})_{j}(\gamma_{k}-1)} + q_{k}\right].$$
(22)

Значение давления в *i*-й ячейке после релаксации находится с использованием соотношения насыщения

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^0\right)_j = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \beta_j \times \left(\alpha_k^*\right)_j = 1,$$
(23)

где $\beta_j = \frac{L_j}{\Delta x_i}$; Δx_i — размер фиксированной *i*-й ячейки на эйлеровой расчетной сетке; $L_1 = \max\left(0, u_{i-1/2}^*\right)\Delta t$, $L_3 = \min\left(0, u_{i+1/2}^*\right)\Delta t$, $L_2 = \Delta x_i - L_1 - L_3$. Выражение (23) может быть записано в виде
Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах Труды ИБРАЭ РАН. Выпуск 14

$$\sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \left(m_k^*\right)_j \left[\frac{1}{\rho_k^*\left(p^*\right)}\right]_j = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} \left(m_k^0\right)_j \left[\frac{1}{\rho_k^*\left(p^*\right)}\right]_j = 1,$$
(24)

где $(m_k^*)_j = \beta_j \times (\alpha_k^*)_j \times (\rho_k^*)_j = (m_k^0)_j = \beta_j \times (\alpha_k^0)_j \times (\rho_k^0)_j$ — удельная масса фазы k в областях I, II или III (см. рис. 1), которая является постоянной в ходе релаксации.

Величины плотности каждой из фаз в различных областях *i*-й ячейки определяются из следующих релаксационных соотношений [4]:

$$\left(e_{k}^{*}\right)_{j}-\left(e_{k}^{0}\right)_{j}+p^{*}\left(\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}}-\frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}}\right)=\frac{\left(u^{*}-u_{j}^{0}\right)^{2}}{2}.$$
(25)

Для упомянутого выше уравнения состояния выражение (25) может быть записано в виде

$$\frac{1}{\left(\rho_{k}^{*}\right)_{j}} = \frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}} \frac{p_{j}^{0} + \gamma_{k}\pi_{k} + p^{*}\left(\gamma_{k} - 1\right)}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}} + \frac{\left(u^{*} - u_{j}^{0}\right)^{2}}{2} \frac{\gamma_{k} - 1}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}}.$$
 (26)

Подставляя значения плотности из (26) в (24), можно получить уравнение для вычисления величины давления p^* :

$$F(p^{*}) = \sum_{\substack{j=1,3\\k=1,2}} (m_{k}^{0})_{j} \times \left(\frac{1}{\left(\rho_{k}^{0}\right)_{j}} \frac{p_{j}^{0} + \gamma_{k}\pi_{k} + p^{*}(\gamma_{k} - 1)}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}} + \frac{\left(u^{*} - u_{j}^{0}\right)^{2}}{2} \frac{\gamma_{k} - 1}{\left(p^{*} + \pi_{k}\right)\gamma_{k}}\right) - 1 = 0,$$
(27)

где скорость u^* находится из (21).

Решение уравнения (27) может быть найдено с использованием метода Ньютона.

Значение объемной доли после релаксации вычисляется из уравнения состояния двухфазной смеси:

$$\alpha_{1}^{*} = \frac{\rho^{*}e^{*} - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{*}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{*}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}} =$$

$$= \frac{\rho^{*}e^{*} - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{0}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{0}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}} =$$

$$= \frac{\left[\rho^{*}E^{*} - \rho^{*}\frac{\left(u^{*}\right)^{2}}{2}\right] - \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1} - (\alpha_{1}\rho_{1})^{0}q_{1} - (\alpha_{2}\rho_{2})^{0}q_{2}}{\frac{p^{*} + \gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{2} - 1} + \frac{p^{*} + \gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2} - 1}},$$

$$(28)$$

где величина $(\alpha_k \rho_k)^* = (\alpha_k \rho_k)^0$, k = 1, 2, определяется из (19); значение $\rho^* E^*$ находится с использованием (22); параметр ρ^* вычисляется из (18).

Теперь величины плотностей ρ_k^* каждой из фаз после релаксации в *i*-й ячейке фиксированной расчетной сетки могут быть определены с использованием выражения (19). Таким образом, соотношения (21), (27), (28) и (19) позволяют определить скорость, давление, объемную долю и плотность каждого компонента двухфазной среды.

2.3. Релаксационный метод для механически неравновесной по давлению двухфазной модели из шести уравнений

Неравновесная по давлению двухфазная модель из шести уравнений в одномерном случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_{1}}{\partial x} = \mu (p_{1} - p_{2}), \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{1} \rho_{1} u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{2} \rho_{2} u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^{2} + \alpha_{1} p_{1} + \alpha_{2} p_{2})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_{1} \rho_{1} e_{1}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{1} \rho_{1} e_{1} u)}{\partial x} + \alpha_{1} \rho_{1} \frac{\partial u}{\partial x} = -p_{I} \mu (p_{1} - p_{2}), \\ \frac{\partial \alpha_{2} \rho_{2} e_{2}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{2} \rho_{2} e_{2} u)}{\partial x} + \alpha_{2} \rho_{2} \frac{\partial u}{\partial x} = p_{I} \mu (p_{1} - p_{2}), \end{cases}$$
(29)

где величина интерфейсного давления p_I вычисляется в асимптотическом пределе от значения интерфейсного давления в неравновесной модели из семи уравнений:

$$p_{I} = \frac{\rho_{2}c_{2}p_{1} + \rho_{1}c_{1}p_{2}}{\rho_{1}c_{1} + \rho_{2}c_{2}},$$
(30)

где c_k — скорость звука в k -й фазе, k = 1, 2.

Скорость звука в двухфазной смеси в данной модели совпадает с «вмороженной» скоростью звука и является монотонной функцией объемной доли:

$$c_f^2 = Y_1 c_1^2 + Y_2 c_2^2.$$
(31)

Модель (29) является гиперболической со следующими значениями характеристических скоростей: $u + c_f$, u, $u - c_f$.

Используя уравнения для внутренней энергии каждой из фаз, а также уравнение для импульса двухфазной смеси, можно получить дополнительное уравнение для полной энергии:

$$+\frac{\partial \rho \left(Y_1 e_1 + Y_2 e_2 + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(u \left(\rho \left(Y_1 e_1 + Y_2 e_2 + \frac{u^2}{2}\right) + \left(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2\right)\right)\right)}{\partial x} = 0.$$
(32)

Это уравнение применяется для коррекции ошибок, возникающих при численной аппроксимации двух неконсервативных уравнений для внутренних энергий в присутствии сильных волн.

Использование соотношений (14), связывающих значения газодинамических параметров по обеим сторонам фронта ударной волны в равновесной модели из пяти уравнений, при численном решении системы (13) не гарантирует сходимости численного решения к аналитическому [5]. Так как неравновесная по давлению модель из шести уравнений предназначена для численной аппроксимации системы (13), то для решения гиперболической части системы (29) без релаксационных членов в правой части используются соотношения (14), дополненные условием непрерывности профиля объемной доли: $\alpha_1 = \alpha_1^0$.

Решение системы (29) состоит из двух шагов. На первом шаге решается гиперболическая часть двухфазной неравновесной по давлению модели из шести уравнений без релаксационных членов в правой части. На этом шаге объемная доля остается постоянной при прохождении волны разрежения, что позволяет решить задачу Римана с применением простого римановского солвера типа HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) [5]. На втором шаге учитывается влияние релаксационных членов с применением метода Ньютона, который обеспечивает положительность объемной доли. В конце численного алгоритма вводится поправка величины давления с использованием уравнения состояния двухфазной смеси:

$$p(\rho, e, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\rho e - \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}}.$$
 (33)

При построении гиперболического солвера рассматривается задача Римана на границе расчетной ячейки, разделяющей состояния двухфазной среды слева (L) и справа (R). Скорости левой волны оценивается следующим образом:

$$S_{\rm L} = \min(u_{\rm L} - c_{\rm L}, u_{\rm R} - c_{\rm R}) =$$

= $\min[u_{\rm L} - (c_{\rm 1})_{\rm L} (Y_{\rm 1})_{\rm L} - (c_{\rm 2})_{\rm L} (Y_{\rm 2})_{\rm L}, u_{\rm R} - (c_{\rm 1})_{\rm R} (Y_{\rm 1})_{\rm R} - (c_{\rm 2})_{\rm R} (Y_{\rm 2})_{\rm R}],$ (34)

где

$$(c_k)_{\rm L} = \sqrt{\left(\gamma_k\right)_{\rm L} \frac{\left[\left(p_k\right)_{\rm L} + \left(\pi_k\right)_{\rm L}\right]}{\left(\rho_k\right)_{\rm L}}};$$

$$(c_k)_{\rm R} = \sqrt{\left(\gamma_k\right)_{\rm R} \frac{\left[\left(p_k\right)_{\rm R} + \left(\pi_k\right)_{\rm R}\right]}{\left(\rho_k\right)_{\rm R}}};$$

$$(Y_k)_{\rm L} = \frac{\left(\alpha_k\right)_{\rm L} \left(\rho_k\right)_{\rm L}}{\rho_{\rm L}};$$

$$(Y_k)_{\rm R} = \frac{\left(\alpha_k\right)_{\rm R} \left(\rho_k\right)_{\rm R}}{\rho_{\rm R}};$$

$$\rho_{\rm L} = (\alpha_1)_{\rm L} \left(\rho_1\right)_{\rm L} + (\alpha_2)_{\rm L} \left(\rho_2\right)_{\rm L};$$

$$\rho_{\rm R} = (\alpha_1)_{\rm R} \left(\rho_1\right)_{\rm R} + (\alpha_2)_{\rm R} \left(\rho_2\right)_{\rm R}.$$

Скорость волны, движущейся направо,

$$S_{\rm R} = \max\left(u_{\rm L} + c_{\rm L}, u_{\rm R} + c_{\rm R}\right) = \\ = \max\left[u_{\rm L} + (c_{\rm 1})_{\rm L} (Y_{\rm 1})_{\rm L} + (c_{\rm 2})_{\rm L} (Y_{\rm 2})_{\rm L}, u_{\rm R} + (c_{\rm 1})_{\rm R} (Y_{\rm 1})_{\rm R} + (c_{\rm 2})_{\rm R} (Y_{\rm 2})_{\rm R}\right].$$
(35)

Для расчета скорости движения контактного разрыва используется выражение

$$S_{M} = \frac{\left(\rho_{L}u_{L}^{2} + p_{L}\right) - \left(\rho_{R}u_{R}^{2} + p_{R}\right) - S_{L}\rho_{L}u_{L} + S_{R}\rho_{R}u_{R}}{\rho_{L}u_{L} - \rho_{R}u_{R} - S_{L}\rho_{L} + S_{R}\rho_{R}},$$
(36)

где

$$p_{\mathrm{L}} = (\alpha_{1})_{\mathrm{L}} (p_{1})_{\mathrm{L}} + (\alpha_{2})_{\mathrm{L}} (p_{2})_{\mathrm{L}};$$
$$p_{\mathrm{R}} = (\alpha_{1})_{\mathrm{R}} (p_{1})_{\mathrm{R}} + (\alpha_{2})_{\mathrm{R}} (p_{2})_{\mathrm{R}}.$$

Состояния газодинамических параметров в возмущенной области определяются следующим образом:

$$u^* = S_M, \qquad (37)$$

$$\left(\alpha_{1}^{*}\right)_{L}=\left(\alpha_{1}\right)_{L},$$
(38)

$$\left(\alpha_{1}^{*}\right)_{R}=\left(\alpha_{1}\right)_{R},$$
(39)

$$\left(\rho_{k}^{*}\right)_{L}=\left(\rho_{k}\right)_{L}\frac{S_{L}-u_{L}}{S_{L}-S_{M}},\ \left(\rho_{k}^{*}\right)_{R}=\left(\rho_{k}\right)_{R}\frac{S_{R}-u_{R}}{S_{R}-S_{M}},$$
(40)

$$p^{*} = p_{\mathrm{R}} + \rho_{\mathrm{R}} u_{\mathrm{R}} \times (u_{\mathrm{R}} - S_{\mathrm{R}}) - S_{\mathrm{M}} \times (S_{\mathrm{M}} - S_{\mathrm{R}}) \times \left[\left(\alpha_{1}^{*} \right)_{\mathrm{R}} \left(\rho_{1}^{*} \right)_{\mathrm{R}} + \left(\alpha_{2}^{*} \right)_{\mathrm{R}} \left(\rho_{2}^{*} \right)_{\mathrm{R}} \right],$$

$$(41)$$

$$E_{\rm L}^{*} = \frac{\rho_{\rm L} E_{\rm L} \left(u_{\rm L} - S_{\rm L} \right) + \rho_{\rm L} u_{\rm L} - p^{*} S_{M}}{\left[\left(\alpha_{\rm 1}^{*} \right)_{\rm L} \left(\rho_{\rm 1}^{*} \right)_{\rm L} + \left(\alpha_{\rm 2}^{*} \right)_{\rm L} \left(\rho_{\rm 2}^{*} \right)_{\rm L} \right] \times \left(S_{M} - S_{\rm L} \right)}, \tag{42}$$

где

$$E_{L} = (Y_{1})_{L} (e_{1})_{L} + (Y_{2})_{L} (e_{2})_{L} + \frac{u_{L}^{2}}{2} =$$

$$= (Y_{1})_{L} \frac{(p_{1})_{L} + (\gamma_{1})_{L} (\pi_{1})_{L}}{(\rho_{1})_{L} \times ((\gamma_{1})_{L} - 1)} + (Y_{2})_{L} \frac{(p_{2})_{L} + (\gamma_{2})_{L} (\pi_{2})_{L}}{(\rho_{2})_{L} \times ((\gamma_{2})_{L} - 1)} + \frac{u_{L}^{2}}{2};$$

$$E_{R}^{*} = \frac{\rho_{R} E_{R} (u_{R} - S_{R}) + \rho_{R} u_{R} - p^{*} S_{M}}{\left[(\alpha_{1}^{*})_{R} (\rho_{1}^{*})_{R} + (\alpha_{2}^{*})_{R} (\rho_{2}^{*})_{R} \right] \times (S_{M} - S_{R})},$$
(43)

где

$$E_{R} = (Y_{1})_{R} (e_{1})_{R} + (Y_{2})_{R} (e_{2})_{R} + \frac{u_{R}^{2}}{2} =$$

$$= (Y_{1})_{R} \frac{(p_{1})_{R} + (\gamma_{1})_{R} (\pi_{1})_{R}}{(\rho_{1})_{r} \times ((\gamma_{1})_{R} - 1)} + (Y_{2})_{R} \frac{(p_{2})_{R} + (\gamma_{2})_{R} (\pi_{2})_{R}}{(\rho_{2})_{R} \times ((\gamma_{2})_{R} - 1)} + \frac{u_{R}^{2}}{2};$$

$$p_{k}^{*} = (p_{k} + \pi_{k}) \frac{(\gamma_{k} - 1)\rho_{k} - (\gamma_{k} + 1)\rho_{k}^{*}}{(\gamma_{k} - 1)\rho_{k}^{*} - (\gamma_{k} + 1)\rho_{k}} - \pi_{k}.$$
(44)

185

Консервативная часть системы (29), (32) в отсутствии неконсервативных членов имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_1 \rho_1 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_2 \rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (u(\rho E + p))}{\partial x} = 0. \end{cases}$$
(45)

Численное решение системы (45) может быть записано в виде схемы Годунова:

$$U_{i}^{n+1} = U_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bigg[F^{*} \big(U_{i}^{n}, U_{i+1}^{n} \big) - F^{*} \big(U_{i-1}^{n}, U_{i}^{n} \big) \bigg],$$
(46)

где

$$U = (\alpha_{1}\rho_{1}, \alpha_{2}\rho_{2}, \rho u, \rho E)^{T};$$

$$F = (\alpha_{1}\rho_{1}u, \alpha_{2}\rho_{2}u, \rho u^{2} + p, (\rho E + p)u)^{T} =$$

$$= \left\{ \alpha_{1}\rho_{1}u, \alpha_{2}\rho_{2}u, \rho u^{2} + \alpha_{1}p_{1} + \alpha_{2}p_{2}, \left[\rho\left(Y_{1}e_{1} + Y_{2}e_{2} + \frac{u^{2}}{2}\right) + p\right]u\right\}^{T}.$$

Значения потоковых величин в (46) определяются с использованием соотношений (37)—(44).

Новые величины объемной доли определяются также с применением метода Годунова из уравнения адвекции:

$$(\alpha_{1})_{i}^{n+1} = (\alpha_{1})_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (u^{*} \alpha_{1}^{*})_{i+1/2} - (u^{*} \alpha_{1}^{*})_{i-1/2} - (\alpha_{1})_{i} \times \left[(u^{*})_{i+1/2} - (u^{*})_{i-1/2} \right] \right\}.$$
(47)

Численная схема (46), (47) обеспечивает положительность объемной доли на первом шаге решения системы (29).

Решение неконсервативных уравнений для внутренней энергии находится в предположении, что произведения $(\alpha_k \rho_k)_i^n$ не изменяются в течение временного отрезка Δt на первом шаге решения системы (29):

$$(\alpha_{k}\rho_{k}e_{k})_{i}^{n+1} = (\alpha_{k}\rho_{k}e)_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (\alpha_{k}^{*}\rho_{k}^{*}e_{k}^{*}u^{*})_{i+1/2} - (\alpha_{k}^{*}\rho_{k}^{*}e_{k}^{*}u^{*})_{i-1/2} + (\alpha_{k}p_{k})_{i}^{n} \times \left[(u^{*})_{i+1/2} - (u^{*})_{i-1/2} \right] \right\}.$$

$$(48)$$

Численные ошибки, возникающие при таком вычислении значений внутренних энергий, не являются критическими, так как эти величины используются для оценки давлений в конце гиперболического шага. На следующем шаге будет учтено влияние релаксационных членов в правой части (29), что позволит внести поправки в найденные значения внутренних энергий.

Численная схема (46)—(48) обеспечивает сохранение однородности двухфазного потока в присутствии интерфейсной границы раздела фаз [5].

На втором шаге численного решения системы (29) рассматривается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial \alpha_1 \rho_1 e_1}{\partial t} = -p_1 \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \alpha_2 \rho_2 e_2}{\partial t} = p_1 \mu \left(p_1 - p_2 \right), \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} = 0, \end{cases}$$
(49)

где $\mu \to +\infty$.

Неконсервативные уравнения для внутренних энергий можно привести к виду

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + p_1 \frac{\partial \frac{1}{\rho_1}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + p_1 \frac{\partial \frac{1}{\rho_2}}{\partial t} = 0.$$
(50)

Численное интегрирование уравнений (50) осуществляется следующим образом:

$$e_{1}(p, \rho_{1}) - e_{1}^{0} + p\left(\frac{1}{\rho_{1}} - \frac{1}{\rho_{1}^{0}}\right) = 0,$$

$$e_{2}(p, \rho_{2}) - e_{2}^{0} + p\left(\frac{1}{\rho_{2}} - \frac{1}{\rho_{2}^{0}}\right) = 0.$$
(51)

Система уравнений (51) содержит три неизвестных параметра: p, ρ_1 и ρ_2 . С учетом постоянства парциальных плотностей во время релаксации для замыкания системы используется условие равенства суммы объемных долей единице:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1^0} + \frac{\alpha_2^0 \rho_2^0}{\rho_2^0} = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1} + \frac{\alpha_2^0 \rho_2^0}{\rho_2} = 1.$$
 (52)

С учетом уравнения состояния система уравнений (51), (52) эквивалентна уравнению с одним неизвестным

$$F(p) = \alpha_1^0 \frac{p_1^0 + \gamma_1 \pi_1 + p(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(p + \pi_1)} + \alpha_2^0 \frac{p_2^0 + \gamma_2 \pi_2 + p(\gamma_2 - 1)}{\gamma_{21}(p + \pi_2)} - 1 = 0.$$
(53)

Решение уравнения (53) находится с использованием метода Ньютона. Значения плотностей каждой из фаз определяются из соотношений (51):

$$\rho_{k} = \rho_{k}^{0} \frac{\gamma_{k} \left(\pi_{k} + p\right)}{p_{k}^{0} + \gamma_{k} \pi_{k} + p\left(\gamma_{k} - 1\right)}.$$
(54)

Величина объемной доли определяется из условия сохранения массы:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0}{\rho_1}.$$
 (55)

Найденные в результате учета релаксации величины α_k , ρ_k и p могут быть не согласованы со значением полной энергии двухфазной смеси, определенной из решения соответствующего консервативного уравнения системы (45). Для решения этой проблемы используется уравнение состояния двухфазной смеси (33), которое должно выполняться как в однофазном пределе, так и в диффузионной зоне вблизи интерфейсной границы:

$$p(\rho, e, \alpha_{k}) = \frac{\rho e^{-\left(\frac{\alpha_{1}\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1}\right)}}{\frac{\alpha_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}}{\gamma_{2}-1}} = \frac{\rho E^{-\rho}\frac{u^{2}}{2} - \left(\frac{\alpha_{1}\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1}\right)}{\frac{\alpha_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{\alpha_{2}}{\gamma_{2}-1}}.$$
(56)

Численные исследования показывают, что поправленная при помощи соотношения (56) величина давления является довольно точной [5].

3. Результаты

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных с использованием описанных моделей, для переноса интерфейсной границы раздела фаз в додекане при постоянном поле скоростей и давлений, распада разрыва в ударной водяной трубе и кавитации в воде. Также приведено сравнение результатов расчета с точным решением.

3.1. Перенос интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений

Левая часть метровой трубы (x < 0,5 м) заполнена жидким додеканом, а правая — газообразным додеканом при атмосферном давлении. Для согласованности численной модели каждая фаза в начальный момент содержит малую долю (10^{-8}) другой фазы. Интерфейсная граница движется в однородном поле скоростей 100 м/c. Газодинамические параметры газообразного и жидкого додекана приведены в табл. 1.

На рис. 2 приведены результаты расчетов для момента 2 мс, выполненного на сетке из 1000 ячеек при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили объемной доли газообразного додекана (*a*) и плотности двухфазной смеси (*б*). Видно полное согласие результатов, полученных по разным моделям.



Рис. 2. Перенос интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений. Профили объемной доли газообразного додекана (*a*) и плотности двухфазной смеси (*б*)

| <i>x</i> < 0,5 м | <i>x</i> > 0,5 м |
|--|--|
| <i>и</i> = 100 м/с | <i>и</i> = 100 м/с |
| $p = 10^5 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ ho_{\rm m}=500~{\rm kg/m}^3$ | $ ho_{\rm m}=500~{\rm kg/m}^3$ |
| $ \rho_{\Gamma} = 2 \ \kappa\Gamma/M^3 $ | $\rho_{\Gamma} = 2 \ \kappa\Gamma/M^3$ |
| $\gamma_{*} = 2,19$ | $\gamma_{*} = 2,19$ |
| $\gamma_r = 1,05$ | $\gamma_r = 1,05$ |
| $\pi_{_{\rm sw}}=4\cdot 10^8$ | $\pi_{_{\scriptscriptstyle{ m sk}}}=4\cdot 10^8$ |
| $\pi_{r} = 0$ | $\pi_{r} = 0$ |
| $\alpha_{r} = 10^{-8}$ | $\alpha_{r} = 1 - 10^{-8}$ |

Таблица 1. Газодинамические параметры газообразного и жидкого додекана для задачи о переносе интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений

3.2 Распад разрыва в ударной трубе с додеканом

Левая часть метровой трубы ($x < 0,75\,{\rm M}$) заполнена жидким додеканом при высоком давлении $10^8\,$ Па. Правая часть трубы ($x > 0,75\,{\rm M}$) содержит газообразный додекан при атмосферном давлении. Для согласованности численной модели каждая фаза содержит малую долю (10^{-8}) другой фазы. В начальный момент двухфазная среда находится в состоянии покоя. Газодинамические параметры газообразного и жидкого додекана приведены в табл. 2.

На рис. З приведены результаты расчетов для момента 473 мкс, выполненных на сетке из 1000 ячеек при значении числа Куранта 0,8 с использованием различных моделей. Показаны профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*). Также представлены результаты расчета, полученные с использованием точного римановского солвера. Видно, что при такой большой разнице начальных давлений (три порядка) профили термодинамических параметров, полученные с использованием равновесной модели, оказываются более монотонными.

| <i>x</i> < 0,75 м | <i>x</i> > 0,75 м |
|--|---|
| u = 0 M/c | <i>и</i> = 0 м/с |
| $p = 10^8 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ ho_{\rm воды}=500~\kappa r/m^3$ | $ ho_{_{BODLI}}=500\ { m kg}/{ m m}^3$ |
| $\rho_{\text{воздуха}} = 2 \text{ KG/m}^3$ | $ ho_{\rm воздуха} = 2 \ \kappa \Gamma / {\rm M}^3$ |
| $\gamma_{*} = 2,19$ | $\gamma_{*} = 2,19$ |
| $\gamma_r = 1,05$ | $\gamma_r = 1,05$ |
| $\pi_{_{ m sc}} = 4 \cdot 10^8$ | $\pi_{_{\scriptscriptstyle{ m sw}}}=4\cdot 10^8$ |
| $\pi_{r} = 0$ | $\pi_{r} = 0$ |
| $\alpha_{\text{воздуха}} = 10^{-8}$ | $\alpha_{_{BO3JYXA}} = 1 - 10^{-8}$ |

Таблица 2. Газодинамические параметры газообразного и жидкого додекана для задачи о распаде разрыва в ударной трубе



Рис. 3. Распад разрыва в ударной трубе с додеканом. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*)



3.3. Кавитация в воде

Метровая труба заполнена водой с плотностью 1150 кг/M^3 при атмосферном давлении. Объемная примесь воздуха с плотностью 1 кг/M^3 составляет величину 10^{-2} . Скорость двухфазной среды в левой части трубы (x < 0,5 м) равна -2 м/c, а скорость в правой части трубы (x > 0,5 м) составляет величину 2 м/c. Начальные данные для расчета кавитации приведены в табл. 3.

В начальный момент явный интерфейс, разделяющий воду и воздух, отсутствует, и кавитация происходит в двухкомпонентной смеси с малой долей газа. На рис. 4 представлены результаты расчетов на сетке из 1000 ячеек для момента времени 3,2 мс при значении числа Куранта 0,8. Показаны профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухкомпонентной смеси (*в*), а также профили объемной доли воздуха (*г*). На каждом графике также представлены зависимости, полученные с использованием баротропной модели. Более резкие профили газодинамических параметров, полученных с использованием механически равновесной модели, связаны с использованием лагранжева подхода с последующей интерполяцией с применением релаксационных соотношений.



Рис. 4. Кавитация в воде. Профили давления (*a*), скорости (*б*), плотности двухфазной смеси (*в*) и объемной доли воздуха (*г*)



| и воздуха для задачи о кавитации | |
|--|---|
| <i>x</i> < 0,5 м | <i>x</i> > 0,5 м |
| u = -10 м/c | <i>и</i> = 10 м/с |
| $p = 10^5 \Pi a$ | $p = 10^5 \Pi a$ |
| $ ho_{\text{воды}} = 1150 \text{ kg/m}^3$ | $ ho_{\rm bogle}=1150~{\rm kg/m}^3$ |
| $ ho_{\text{воздуха}} = 1 \ \text{кг/m}^3$ | $ ho_{\rm воздуха} = 1 \ \kappa \Gamma / {\rm m}^3$ |
| γ _{воды} = 2,35 | $\gamma_{_{BOДЫ}}=2,35$ |
| $\gamma_{\text{воздуха}} = 1,43$ | $\gamma_{\text{воздуха}} = 1,43$ |
| $\pi_{_{\rm BOДЫ}} = 2,35$ | $\pi_{_{\rm BO,DM}} = 2,35$ |
| $\pi_{\text{воздуха}} = 1,43$ | $\pi_{_{BO3JYXa}} = 1,43$ |
| $\alpha_{\text{воздуха}} = 10^{-2}$ | $\alpha_{\text{воздуха}} = 10^{-2}$ |

Таблица 3. Газодинамические параметры воды и воздуха для задачи о кавитации

4. Заключение

В работе представлены результаты расчетов ряда фундаментальных газодинамических задач: переноса интерфейсной границы раздела фаз в постоянном поле скоростей и давлений, распада разрыва в ударной трубе и кавитации. Расчеты выполнены с применением разных моделей для прямого моделирования двухфазных потоков. Получено качественное согласие результатов. Механически равновесная двухфазная модель наиболее удобна для моделирования фазовых переходов, ее обобщение на двумерный и трехмерный случаи реализуется с использованием метода расщепления по направлениям.

Литература

- Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150. — P. 425—467.
- Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. Vol. 186. P. 361—396.
- Kapila A., Menikoff R., Bdzil J. et al. Two-phase modeling of DDT in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. — 2001. — Vol. 13. — P. 3002—3024.
- Petitpas F., Franquet E., Saurel R., Le Metayer O. A relaxation-projection method for compressible flows. — Pt. 2: Artificial heat exchanges for multiphase shocks // J. Comput. Phys. — 2007. — Vol. 225. — P. 2214— 2248.
- Saurel R., Petitpas F., Berry R. A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // J. Comput. Phys. — 2009. — Vol. 228. — P. 1678—1712.
- Baer M. R., Nunziato J. W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Intl. J. Multiphase Flows. — 1986. — Vol. 12. — P. 861—889.
- Saurel R., Petitpas F., Abgrall R. Modelling phase transition in metastable liquids: application to cavitating and flashingflows // J. Fluid Mech. — 2008. — Vol. 607. — P. 313—350.
- Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
- Saurel R., Le Metayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 431. — P. 239—271.
- Saurel R., Le Metayer O., Massoni J., Gavrilyuk S. Shock jump relations for multiphase mixtures with stiff mechanical relaxation // Shock Waves / Spinger. — 2007. — Vol. 16. — P. 209—232.
- 11. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluids dynamics. Berlin: Springer, 1997.

Научное издание

ТРУДЫ ИБРАЭ

Под общей редакцией чл.-кор. РАН Л. А. Большова

Выпуск 14

МЕТОДЫ ПРЯМОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ

Утверждено к печати Ученым советом Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук

Редактор А. И. Иоффе

Издательство «Наука» 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90 Редактор издательства *Л. В. Абрамова*

Оригинал-макет подготовлен ООО «Академ-Принт» Списки литературы и иллюстрации приведены в авторской редакции

> Формат 60х90 ¹/₁₆. Бумага офсетная 80 г/м² Печать офсетная. Гарнитура «Оффицина» Уч.-изд. л. 11,5. Заказ 25804

Заказное

Отпечатано с готовых диапозитивов типографией 000 «Инфолио-Принт»